

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 9

Serie nona

1 Settembre 1952

Matter Tensors in Symmetrical Systems.

F. G. FUMI (*)

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 14 Maggio 1952)

Summary. — Elementary group theory is shown to provide easily the independent cartesian orthogonal components of tensor properties in material systems of finite symmetry. The method is applied to second, third and fourth order polar and axial tensors of no intrinsic symmetry in trigonal and hexagonal systems, and the final results are tabulated.

1. — Physical properties of matter represent the coupling action of matter between influences exerted and effects obtained (VOIGT ⁽¹⁾); however not all quantities entering in effect-influence relations are physical properties of matter. In this respect one distinguishes between *field quantities* and *matter quantities*. While matter quantities are in themselves consequences of the intimate structure and cohesion of matter, field quantities simply represent fields induced in matter by external causes: typical examples are surface stress (matter quantity ⁽²⁾) and elastic stress (field quantity).

Generally more than one number is required to specify a physical property at a point in a material system: whenever this occurs, the property is called *anisotropic* since it depends on direction except for the systems in which for this property all directions are equivalent by symmetry. When only one number is necessary in any material system, the property does not depend on direction and is called *scalar*. The number specifying a scalar property

(*) This work was largely performed at the Department of Physics, University of Illinois, Urbana, Ill., U.S.A., during 1950.

⁽¹⁾ W. VOIGT: *Lehrbuch der Krystallophysik* (Leipzig, 1928), p. 122.

⁽²⁾ R. SHUTTLEWORTH: *Proc. Phys. Soc.*, **63**, 444 (1950).

at any given point transforms as a tensor of order zero of polar or axial nature. The numbers specifying *anisotropic* properties frequently transform as components of polar or axial tensors of order greater than zero: since effects and influences themselves can generally be represented by tensors, this occurs when the effect-influence relation, if it is not linear, can be expanded in power series of the influence. When this cannot be done the description of anisotropic properties with tensors fails, as it does for cleavage and slip phenomena (HERMANN ⁽³⁾). Here we shall consider only tensor properties of matter (matter tensors).

Time reversal symmetry is responsible for the intrinsic symmetry of matter tensors. Indeed the existence of intrinsic symmetry for static properties is proved by the method of thermodynamic potentials; and the applicability of this method is conditioned by macroscopic reversibility (VOIGT ⁽⁴⁾). Similarly the intrinsic symmetry of dynamic properties is expressed by Onsager's relations; and the validity of Onsager's relations follows from microscopic reversibility (ONSAGER ⁽⁵⁾).

Macroscopic space symmetry is responsible for the additional reduction of independent matter tensor components in symmetrical material systems: indeed matter tensor components must be invariant under the existing symmetry. Although crystals are usually referred to, this statement applies as well to any system. *The number of independent components of a matter tensor in a system of given symmetry is invariant under coordinate transformations* ⁽⁶⁾, when reference is made to a general tensor of given order, type (polar or axial)

⁽³⁾ C. HERMANN: *Zeits. f. Kryst.*, **89**, 32 (1934).

⁽⁴⁾ See reference ⁽¹⁾, sections 101, 102, 103: for a specific example section 166.

⁽⁵⁾ L. ONSAGER: *Phys. Rev.*, **37**, 405 (1931); **38**, 2265 (1931); see also H. B. G. CASIMIR: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 343 (1945); S. R. DE GROOT: *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Section 2 (Amsterdam, 1951); W. BOAS and J. K. MACKENZIE: *Progr. Metal Physics*, **2**, 92-94 (1950).

⁽⁶⁾ The writer has been unable to find this theorem in the standard literature on matter tensors. The proof is so simple that the theorem actually appears obvious. The invariance of matter tensor components implies in any given frame, for any given symmetry operation (or group of symmetry operations) the existence of linear relationships among the components: the number q of independent relationships equals the rank of the secular matrix. Since the rank of this matrix is invariant under multiplication by the non-singular transformation matrix ⁽⁷⁾, the number of independent components $r = p - q$ (p = total number of components) is invariant under coordinate transformations.

Besides its theoretical interest, the theorem is useful since it enables the numbers of independent components of matter tensors to be found by using the reference frames which are most convenient to handle.

⁽⁷⁾ See, for instance, M. BÖCHER: *Einführung in die höhere Algebra* (Berlin, 1910), Satz 7, p. 85.

and intrinsic symmetry. The r independent components themselves can be chosen with a certain amount of freedom in each reference frame: some of them can be substituted by others through the solutions of the $p-r$ (p = total number of components) independent invariance relationships. Within this freedom, they are the same in frames which are not distinguishable in their relations to the existing symmetry operations; or which can be obtained one from the other by symmetry operations; or finally which differ from one another by rotations of any angle around symmetry axes of order higher than that of the tensor (HERMANN⁽³⁾).

Several methods have been used to study this effect of macroscopic space symmetry on tensor properties of matter: while equivalent theoretically, they differ in practical utility. NEUMANN⁽⁸⁾ imposes identity to the defining effect-influence relations written in frames equivalent by symmetry. VOIGT⁽⁹⁾, LOVE⁽¹⁰⁾ and most of the early workers in the field⁽¹¹⁾ impose invariance under the symmetry operations to scalars built out of tensor components. POCKELS⁽¹²⁾ applies Neumann's and Voigt's methods. HERMANN⁽³⁾ was apparently the first to impose invariance directly on each tensor component: he simplifies the equations of invariance by using as reference frames the principal axes of the symmetry operations, generally complex. WOOSTER⁽¹³⁾, BOND⁽¹⁴⁾ and MASON⁽¹⁵⁾ also impose invariance directly on each component: WOOSTER and MASON derive the equations of invariance by tensor algebra, and BOND by matrix algebra. FUMI⁽¹⁶⁾ eliminates completely the algebraic calculations needed to obtain and solve the equations of invariance with his *direct inspection method* which uses the correspondence between cartesian orthogonal tensor components and coordinate products. In the usual frames the method can be applied to obtain directly the independent tensor com-

(8) F. NEUMANN: *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität* (Leipzig, 1885), chap. 12.

(9) See reference (1), sections 81, 82: for specific applications, sections 147, 169, 286 and 414.

(10) A. E. H. LOVE: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, (Cambridge 1927), 4th edition: section 105.

(11) See, for instance, M. ABRAHAM: *Enc. d. Math. Wiss.*, IV. 14. III (Leipzig, (1902-08).

(12) F. POCKELS: *Lehrbuch der Krystalloptik* (Leipzig, 1906).

(13) W. A. WOOSTER: *A Textbook on Crystal Physics* (Cambridge 1938); chap. I.

(14) W. L. BOND: *Bell System Techn. Journ.*, **22**, 1 (1943).

(15) W. P. MASON: *Bell System Techn. Journ.*, **26**, 80 (1947); and *Piezoelectric Crystals and their Application to Ultrasonics* (New York, 1950).

(16) F. G. FUMI: a) *Acta Cryst.*, **5**, 44 (1952); b) *Acta Cryst.* (1952) to appear. The use of the correspondence between the transformation properties of material constants and of coordinate products has been advocated lately also by H. JURETSCHKE: *Acta Cryst.*, **5**, 148 (1952).

ponents only for triclinic, monoclinic, orthorhombic, tetragonal and cubic symmetries in which the conventional coordinates do not transform into linear combinations of themselves under the symmetry operations: symmetries C_3 , S_6 and C_{3v} can be treated directly only by using somewhat peculiar frames. However the method enables also to derive the independent components in the usual frames for all trigonal and hexagonal groups from the corresponding components for symmetry C_3 . Direct inspection is by far the simplest of the methods mentioned and it eliminates the possibility of errors which have been relatively frequent with the other method (see table X (^{17,14,18})). A significant application of direct inspection has been made to obtain the third-order elastic coefficients for all the crystallographic groups (¹⁹).

With the exception of one, the group theoretical treatments of tensor properties of symmetrical systems published so far give only the *number* of independent components: this number is logically taken equal to the number of independent totally symmetrical linear combinations of tensor components in the symmetry group of interest. To obtain this number BHAGAVANTAM (²⁰) sets up the corresponding polar tensor representation: for polar tensors he looks then for the number of totally symmetrical components, while for axial tensors, he looks for the number of one-dimensional components antisymmetric in improper rotations. Each symmetry group is treated separately. JAHN (²¹) avoids the lengthy character calculations of BHAGAVANTAM by reducing the polar or axial tensor representations of the full rotation group through his formulae for the symmetrical products of representations (²²), derived with TISZA's expression for the characters (²³): he comes down to the group of interest through correlation tables.

Apparently group theory has been applied to list independent components of matter tensors only in a paper on elastic constants by JAHN (²²). The condition that the elastic potential energy be totally symmetrical in the symmetry group of the system enables JAHN to write it down in terms of the linear combinations of strain components subtending the completely reduced strain tensor representation: this gives him the number of elastic constants in each symmetry group. The relations between them are found by com-

(¹⁷) F. POCKELS: *Ann. d. Phys. Chem.*, **37**, 144 (1889).

(¹⁸) W. P. MASON: *Bell System Techn. Journ.*, **29**, 184-86 (1950).

(¹⁹) F. G. FUMI: *Phys. Rev.*, **83**, 1274 (1951); **86**, 561 (1952).

(²⁰) S. BHAGAVANTAM: *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **16**, 359 (1942); S. BHAGAVANTAM and D. SURYANARAYANA: *Acta Cryst.*, **2**, 21 (1949).

(²¹) H. A. JAHN: *Acta Cryst.*, **2**, 30 (1949).

(²²) H. A. JAHN: *Zeits. f. Kryst.*, **98**, 191 (1937). The proof of the theorem on which the method is based has never been published by Dr. JAHN (private communication).

(²³) L. TISZA: *Zeits. f. Phys.*, **82**, 48 (1933): Eqs. 13-16.

paring the most general expression of the elastic potential in terms of strain components with the one obtained.

The present paper is an attempt to treat the tensor properties of material systems of finite symmetry by group theory in a general fashion ⁽²⁴⁾.

2. — The components in any reference frame of a matter tensor in a material system must be invariant under the existing symmetry operations: the same holds, of course, for their linear combinations. Then each non-zero component (and in particular each independent one) must be invariant if one considers its relations with the other non-zero components and the non invariant linear combinations of non-zero components must vanish. Similarly each non-invariant component must vanish and, as a consequence, the same holds for any linear combination of them.

The theory of three-dimensional rotation groups is a very suitable instrument for identifying the non-zero components in a chosen frame and for then obtaining a complete set of independent relationships among them; so leading to the independent components. One must simply *a*) construct all the independent linear combinations of tensor components belonging to the totally symmetrical representation; and *b*) construct all the independent non-totally symmetrical linear combinations which can be formed with the components contained in the bases *a*). These latter components are all the non-zero ones: the vanishing of the linear combinations *b*) gives a complete set of independent homogeneous equations among them. To find a set of independent components it is generally sufficient to look over these linear equations, but a criterion is available in case of need: a set of non-zero components leaving after cancellation of their columns a non-vanishing minor of the secular matrix is a set of independent components. The number of independent components obviously equals the difference between the number $p - v$ (v = number of vanishing components) of non-zero components and the number $q - v$ (q = number of independent relationships among all components) of independent relationships among them; that is the number $p - q$ of totally symmetrical bases *a*).

In this way one can study a matter tensor in a material system of any given symmetry. However, the existence of definite correlations among the irreducible representations of rotation groups suggests the possibility of obtaining almost immediately the results in all subgroups of a group treated with proper completeness. To achieve this end it is necessary *a*) to construct the independent linear combinations of tensor components belonging to all

⁽²⁴⁾ The treatment has been extended to infinite groups by Dr. H. J. JURETSCHKE: H. J. JURETSCHKE: *Application of Group Theory to the Description of Physical Properties of Crystals*, Notes for Physics 8493, Polytechnic Institute of Brooklyn. Reference is given to the present paper of the writer as due to appear.

the one-dimensional representations of the group which are correlated to the totally symmetrical representation of some of the subgroups; and β) to construct with the components contained in the bases α) all the independent linear combinations belonging to the other irreducible representations of the group which can be formed. For each subgroup, the non-zero components are those contained in the bases α) which belong to its totally symmetrical representation: the vanishing of all the other linear combinations which contain these components gives a complete set of independent relationships among them.

Without loss of generality, we shall restrict ourselves to cartesian orthogonal reference frames. It is then possible and convenient to replace tensor components in the procedure with coordinate products of corresponding order and intrinsic symmetry. Indeed polar tensor components in cartesian orthogonal frames transform as do coordinate products. Axial tensor components in cartesian orthogonal frames, instead, transform as do products of coordinates only under proper rotations, while under improper rotations their transformation equations differ from those for products of coordinates by a factor -1 . So, when axial tensors are considered, one must look in a) for linear combinations of coordinate products belonging to the one-dimensional representation antisymmetric in improper rotations; and in α) one will be interested in all the one-dimensional representations of the group which are correlated to such a representation of some of the subgroups. We shall denote the cartesian orthogonal components of polar and axial tensors with the coordinate products that are their indices.

Since we wish to consider only finite symmetry groups, the usual formula

$$(1) \quad n_i = \frac{1}{N} \sum_j h_j \chi'_j(R_j) \chi_i(R_j)$$

(n_i = number of i th irreducible components of the reducible representation; h_j = number of elements of class j in the group of order N ; $\chi'_j(R_j)$ = character of an operation of class j in the reducible representation; $\chi_i(R_j)$ = character of an operation of class j in the i th irreducible representation) provides us the number of bases a), or α), which can be constructed with coordinate products of a given order and intrinsic symmetry: the characters $\chi'_j(R_j)$ of the polar tensor (coordinate products) representations are quickly obtained by general or symmetrical (TISZA⁽²³⁾) direct products.

The numbers of bases b), or β), are easily found. Inspection of the character tables and consideration of the frame chosen gives the types of bases; the corresponding numbers of linear combinations are obtained by subtracting, from the numbers of coordinate products of interest, the numbers of bases a), or α), already constructed with them. Examples will be given in section 3.

TABLE I (*). — Correlations between irreducible representations of trigonal and hexagonal groups.

D_{6h}	D_6-62	$C_{6h}-6/m$	$C_{6v}-6mm$	C_6-6	S_6-3	$D_{3h}-\bar{6}2m$	$C_{3h}-\bar{6}$	$D_{3d}-\bar{3}m$	D_3-32	$C_{3v}-3m$	C_3-3
A_{1g}	A_1	A_g	A_1	A	A_g	A'_1	A'	A_{1g}	A_1	A_1	A
A_{1u}	A_1	A_u	A_2	A	A_u	A''_1	A''	A_{1u}	A_1	A_2	A
A_{2g}	A_2	A_g	A_2	A	A_g	A'_2	A'	A_{2g}	A_2	A_2	A
A_{2u}	A_2	A_u	A_1	A	A_u	A''_2	A''	A_{2u}	A_2	A_1	A
B_{1g}	B_1	B_g	B_2	B	A_g	A'_1	A''	A_{1g}	A_1	A_1	A
B_{1u}	B_1	B_u	B_1	B	A_u	A''_1	A'	A_{1u}	A_1	A_2	A
B_{2g}	B_2	B_g	B_1	B	A_g	A'_2	A''	A_{2g}	A_2	A_2	A
B_{2u}	B_2	B_u	B_2	B	A_u	A''_2	A'	A_{2u}	A_2	A_1	A
E_{1g}	E_1	E'_g	E_1	E'	E_g	E''_1	E''	E_g	E	E	E
E_{1u}	E_1	E'_u	E_1	E'	E_u	E''_1	E'	E_u	E	E	E
E_{2g}	E_2	E''_g	E_2	E''	E_g	E''_2	E'	E_g	E	E	E
E_{2u}	E_2	E''_u	E_2	E''	E_u	E''_2	E''	E_u	E	E	E

Where alternative choices of corresponding elements are possible, the following choices have been made

D_{6h}	C_{6v}	D_{3h}	D_{3d}	D_2	C_{3v}
$3C'_2$		$3C'_2$	$3C'_2$	$3C'_2$	
$3C''_2$					
$3iC'_2$	$3\sigma_d$		$3\sigma_d$		$3\sigma_v$
$3iC''_2$	$3\sigma_v$	$3\sigma_v$			

(*) Each row of the table lists the irreducible representations of the trigonal and hexagonal groups obtained from the representation of D_{6h} heading the row by eliminating the symmetry elements of D_{6h} which are not contained in the various groups. The nomenclature is the one adopted by EYRING, WALTER and KIMBALL, *Quantum Chemistry* (New York, 1944).

The construction of the bases can be done with Wigner's theorem⁽²⁵⁾ by summing the products of the characters of the representation of interest with the transforms of a coordinate product under the symmetry operations of the given group. To apply the theorem, it is not necessary to build complete transformation tables for the coordinate products since regularities exist. Frequently a simpler procedure can be used: indeed higher order bases are obtained by multiplication of bases formed with lower order coordinate products, when all representations in the direct products, but at most one, are one-dimensional. At times Wigner's theorem is preferred just to obtain simpler bases (and so linear equations of more immediate solution), by applying it to proper sums or differences of coordinate products: a case will be met with in table IX. When no intrinsic symmetry is present, other bases may be

(25) E. WIGNER: *Gruppentheorie* (Braunschweig, 1931), p. 123 ff.

TABLE II. - Character table of D_6 .

	E	C_2	$2C_3$	$2C_6$	$3C'_2$	$3C''_2$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	-2	-1	1	0	0
E_2	2	2	-1	-1	0	0

obtained from one constructed with either of the procedures, simply by permutation.

There is an apparently more systematic way of treating tensor properties of matter by group theory: it consists in studying fully the polar tensor representation corresponding to the given matter tensor. One applies formula (1) to obtain types and numbers of the independent bases of the group which can be constructed with *all* the coordinate products of the given order and intrinsic symmetry; then one constructs them, by multiplication or with Wigner's theorem. This is certainly inconvenient whenever a good number of coordinate products do not need to be considered, that is when many tensor

TABLE III. - Transformation table of x, y, z in D_6
($x//C'_2(1)$, $y//C'_2(1)$, $z//C_6$).

E	C_2	C_3^+	C_3^-	C_6^+	C_6^-
x	$-x$	$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$
y	$-y$	$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$
z	z	z	z	z	z

$C'_2(1)$	$C'_2(2)$	$C'_2(3)$	$C''_2(1)$	$C''_2(2)$	$C''_2(3)$
x	$-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$-x$	$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$
$-y$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$	$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$	y	$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$
$-z$	$-z$	$-z$	$-z$	$-z$	$-z$

components vanish in the group, or in the group and subgroups, of interest. Otherwise this method of treatment is practically equivalent to the other and may be preferable on the ground of personal taste. Examples of its use will be given in section 3.

TABLE IV. — *Polar second order tensor.*

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
S_6 D_{3d}	A_g A_{1g}	$A_{1g}, A_{2g}, B_{1g}, B_{2g}$ A_{1g}, B_{1g}	$xx = yy, zz; \quad xy = -yx$ $xx = yy, zz$

One can predict a priori that the tensor does not distinguish ($i \equiv$ inversion)

$$\begin{array}{ll}
 \text{between } D_{6h}(D_6 \times i = C_{6v} \times i = D_{3h} \times i) & \text{and } D_6, C_{6v}, D_{3h}; \\
 \text{» } C_{6h}(C_6 \times i = C_{3h} \times i) & \text{» } C_6, C_{3h}; \\
 \text{» } S_6 (C_3 \times i) & \text{» } C_3; \\
 \text{» } D_{3d}(D_3 \times i = C_{3v} \times i) & \text{» } D_3, C_{3v}.
 \end{array}$$

When one knows the totally symmetrical bases for D_{3d} and S_6 , one can state that the tensor does not distinguish also ($\sigma_h \equiv$ symmetry plane xy)

$$\begin{array}{ll}
 \text{between } D_{6h}(D_{3d} \times \sigma_h) & \text{and } D_{3d} \\
 \text{and » } C_{6h}(S_6 \times \sigma_h) & \text{» } S_6.
 \end{array}$$

It is worthwhile mentioning a point of importance in practice. Unnecessary work is avoided if one remembers that even coordinate products are even under inversion and odd ones are odd: it is also useful to keep in mind the even or odd behaviour of coordinate products under some simple reflections and rotations.

3. Applications.

We choose to study by group theory the tensor properties (up to the fourth order) of material systems having trigonal and hexagonal symmetry groups, all of which are subgroups of D_{6h} . Since even coordinate products are even under inversion and odd ones are odd, one can always do the computations necessary to obtain the α) and β) bases for $D_{6h} = D_6 \times i$ in the group D_6 .

In D_6 we adopt the cartesian orthogonal frame $x||C'_2, y||C''_2, z||C_6$. This choice fixes the reference frames in the other groups through the correspondence of the symmetry elements: the cases where alternative choices are possible are settled in the lower part of table I. Attention should be called to the criteria of equivalence of reference frames given in section 1, page 741.

TABLE V. - Axial second order tensor ⁽²⁶⁾

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
D_6	A_1	A_{1g}, A_{1u}	$xx = yy, zz$
C_{6v}	A_2	A_{1u}, A_{2g}	$xy = -yx$
C_6	A	$A_{1g}, A_{1u}, A_{2g}, A_{2u}$	$xx = yy, zz; \quad xy = -yx$
D_3	A_1	$A_{1g}, A_{1u}, B_{1g}, B_{1u}$	$xx = yy, zz$
C_{3v}	A_2	$A_{1u}, A_{2g}, B_{1u}, B_{2g}$	$xy = -yx$
C_3	A	all A , all B	$xx = yy, zz; \quad xy = -yx$

One can predict a priori that the tensor vanishes identically in the centrosymmetrical classes $D_{6h}, C_{6h}, S_6, D_{3d}$.

When one knows the bases α of interest in C_3 and D_3 one can state that the tensor will vanish also in $C_{3h} = C_3 \times \sigma_h, D_{3h} = D_3 \times \sigma_h$.

It is necessary to consider in α) all the one-dimensional representations of $D_{6h} - 6/mmm$ since they are all correlated to representations of interest for some of the subgroups (table I). The numbers of bases α) which can be constructed are provided by formula (1). Since D_6 does not contain improper rotations, we need the expression of the characters $\chi'(R_i)$ only for proper rotations ⁽²⁷⁾: for second order tensors of no intrinsic symmetry

$$(2) \quad \chi'(R_j(\varphi)) = (1 + 2 \cos \varphi)^2 = 1 + 4 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi,$$

for third order tensors of no intrinsic symmetry

$$(3) \quad \chi'(R_j(\varphi)) = (1 + 2 \cos \varphi)^3 = 1 + 6 \cos \varphi + 12 \cos^2 \varphi + 8 \cos^3 \varphi,$$

⁽²⁶⁾ Despite the difference in transformation behaviour under improper rotations, we denote the cartesian orthogonal components of axial tensors with the coordinate products that are their indices.

⁽²⁷⁾ For improper rotations, the characters are in order

$$(2') \quad \chi'(R_j(\varphi)) = (-1 + 2 \cos \varphi)^2 = 1 - 4 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi,$$

$$(3') \quad \chi'(R_j(\varphi)) = (-1 + 2 \cos \varphi)^3 = -1 + 6 \cos \varphi - 12 \cos^2 \varphi + 8 \cos^3 \varphi,$$

$$(4') \quad \chi'(R_j(\varphi)) = (-1 + 2 \cos \varphi)^4 = 1 - 8 \cos \varphi + 24 \cos^2 \varphi - 32 \cos^3 \varphi + 16 \cos^4 \varphi.$$

and for fourth order tensors of no intrinsic symmetry

$$(4) \quad \chi'(R_f(\varphi)) = (1 + 2 \cos \varphi)^4 = 1 + 8 \cos \varphi + 24 \cos^2 \varphi + 32 \cos^3 \varphi + 16 \cos^4 \varphi$$

The results for D_{6h} are in order $2A_{1g} + A_{2g}$; $3A_{1u} + 4A_{2u} + B_{1u} + B_{2u}$; and $10A_{1g} + 9A_{2g} + 4B_{1g} + 4B_{2g}$.

Concerning the bases β), inspection of the character table of D_6 (table II) and of the transformation table of x , y and z in it (table III) shows that the coordinate products contained in A bases enter also E_2 bases and only

TABLE VI. — Third order polar tensor representation of D_{6h} (*).

$A_{1u} = A_{2g} \times A_{2u}$	$(xy - yx) \times z = xyz - yxz,$	$\left. \begin{array}{l} 13 \text{ products} \quad 7 \text{ bases:} \\ 3E_2 \text{ bases } \beta) \text{ can be} \\ \text{constructed} \end{array} \right\}$
$A_{2u} = A_{1g} \times A_{2u}$	$xzy - yzx, \quad zxy - yxz$	
	$z^2 \times z = z^3$	
	$(x^2 + y^2) \times z = x^2z + y^2z,$	
$B_{1u} \left\{ \begin{array}{l} E_{2g} \times E_{1u} = B_{1u} + B_{2u} + E_{1u} \\ E_{2u} \end{array} \right.$	$x^3 - y^2x - xy^2 - yxy$	$\left. \begin{array}{l} 8 \text{ products} - 2 \text{ bases:} \\ 3E_1 \text{ bases } \beta) \text{ can be} \\ \text{constructed} \end{array} \right\}$
	$y^3 - x^2y - yx^2 - xyx$	
$E_{1u} = A_{1g} \times E_{1u}$	$(x^2 + y^2) \times (x, y) = (x^3 + y^2x, y^3 + x^2y),$ $(x^3 + yxy, y^3 + yxy), (x^3 + xy^2, y^3 + yx^2)$	
$E_{2u} = E_{2g} \times A_{2u}$	$(x^2 - y^2, xy + yx) \times z = (x^2z - y^2z, xyz + yxz),$ $(xzx - yzy, xzy + yzx), (zx^2 - zy^2, zxy + zyx)$	

(*) Of the E bases only those containing A and B products are listed.

those, while the coordinate products contained in B bases enter also E_1 bases and only those.

Since the chosen z belongs to the representation A_{2u} of D_{6h} and the chosen (x, y) to the representation E_{1u} , only one of the three bases α) for second order tensors can be constructed by multiplication of first order bases:

$$A_{2u} \times A_{2u} = A_{1g}, \quad z \times z = z^2.$$

The other two must be constructed with Wigner's theorem: one obtains $x^2 + y^2 - A_{1g}$ and $xy - yx - A_{2g}$. The five coordinate products x^2, y^2, z^2, xy, yx entering the three bases α) allow one to form only one E_{2g} base β) (i.e. two linear combinations) which must be constructed with Wigner's theo-

rem: $E_{2g} - (x^2 - y^2, xy + yx)$. The results for second order tensors in all groups considered are given in tables IV and V.

The treatment and results for third and fourth order tensors are summarized respectively in tables VI, VII, VIII and in tables IX, X, XI. Table XII contains some results on photoelastic constants obtained by particularizing table X.

To treat second, third and fourth order matter tensors in trigonal and

TABLE VII. - Polar third order tensor.

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
D_6	A_1	see table V	$xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx$
C_{6v}	A_1	A_{1g}, A_{2u}	$z^3, x^2z = y^2z, xzx = yzy, zx^2 = zy^2$
C_6	A	see table V	those of D_6 and C_{6v}
D_{3h}	A'_1	A_{1g}, B_{1u}	$x^3 = -y^2x = -xy^2 = -yxy$
C_{3h}	A'	$A_{1g}, A_{2g}, B_{1u}, B_{2u}$	$x^3 = -y^2x = -xy^2 = -yxy$ $y^3 = -x^2y = -yx^2 = -xyx$
D_3	A_1	see table V	those of D_6 and D_{3h}
C_{3v}	A_1	$A_{1g}, A_{2u}, B_{1g}, B_{2u}$	$z^3, x^2z = y^2z, xzx = yzy, zx^2 = zy^2$ $y^3 = -x^2y = -yx^2 = -xyx$
C_3	A	see table V	those of D_6, C_{6v} and C_{3h}

The tensor vanishes identically in the centrosymmetrical classes $D_{6h}, C_{6h}, S_6, D_{3d}$.

hexagonal systems by group theory one could also carry out the full reduction of the polar tensor representations (2), (3) and (4) of D_6 . The results for D_{6h} are in order: $2A_{1g} + A_{2g} + 2E_{1g} + E_{2g}, 3A_{1u} + 4A_{2u} + B_{1u} + B_{2u} + 6E_{1u} + 3E_{2u}, 10A_{1g} + 9A_{2g} + 4B_{1g} + 4B_{2g} + 16E_{1g} + 11E_{2g}$. Besides the bases that we have already met one should construct: two bases E_{1g} for second order tensors

$$A_{2u} \times E_{1u} = E_{1g}, \quad z \times (x, y) = (zx, zy), \quad (xz, yz);$$

three bases E_{1u} for third order tensors

$$A_{2u} \times E_{1g} = E_{1u}, \quad z \times (zx, zy) = (z^2x, z^2y), \quad (zxz, zyz), \quad (xz^2, yz^2)$$

and finally four bases E_{1g} for fourth order tensors

$$A_{1g} \times E_{1g} = E_{1g}, \quad z^2 \times (zx, zy) = (z^3x, z^3y), \quad (z^2xz, z^2yz), \quad (zxz^2, zyz^2), \quad (xz^3, yz^3).$$

All these new bases do not need to be used, since the corresponding polar and axial tensor components vanish in D_{6h} and in all its subgroups considered.

The treatment that we have presented of second, third and fourth order tensors in trigonal and hexagonal groups has, of course, gained in simplicity from the gradual increase in tensor order. To treat directly a fourth order

TABLE VIII. — Axial third order tensor (²⁶).

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
D_{6h}	A_{1u}	A_{1u}	$xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx$
C_{6h}	A_u	A_{1u}, A_{2u}	$xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx$ $z^3, x^2z = y^2z, xzx = yzy, zx^2 = zy^2$
S_6	A_u	$A_{1u}, A_{2u}, B_{1u}, B_{2u}$	$xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx$ $z^3, x^2z = y^2z, xzx = yzy, zx^2 = zy^2,$ $x^3 = -y^2x = -xy^2 = -yxy$ $y^3 = -x^2y = -yx^2 = -xyx$
D_{3d}	A_{1u}	A_{1u}, B_{1u}	$xyz = -yxz, xzy = -yzx, zxy = -zyx$ $x^3 = -y^2x = -xy^2 = -yxy$

The tensor does not distinguish

between	D_{6h}	and	$D_6, C_{6v}, D_{3h};$
"	C_{6h}	"	$C_6, C_{3h};$
"	S_6	"	$C_3;$
"	D_{3d}	"	$D_3, C_{3v}.$

tensor without any previous knowledge on second and third order bases it would be necessary to use Wigner's theorem extensively: indeed the $10A_{1g}$, $9A_{2g}$, $4B_{1g}$ and $4B_{2g}$ fourth order bases would come out of direct products of first order bases, which do not satisfy the condition that all representations in the products, except at most one, be one-dimensional since $A_{1g} = A_{1u}^4$, $A_{2u}^2 \times E_{1u}^2$, E_{1u}^4 , $A_{2g} = A_{2u}^2 \times E_{1u}^2$, E_{1u}^4 ; $B_{1g} = A_{2u} \times E_{1u}^3$, and $B_{2g} = A_{2u} \times E_{1u}^3$.

TABLE IX. - Fourth order polar tensor representation of D_{6h} (+).

$A_{1g} = A_{1g} \times A_{1g}$	$z^2 \times z^2 = z^4$ $(x^2 + y^2) \times (x^2 + y^2) = x^4 + y^4 + x^2y^2 + y^2x^2,$ $x^4 + y^4 + xy^2x + yx^2y, x^4 + y^4 + xyxy + yxyx$ $(x^2 + y^2) \times z^2 = x^2z^2 + y^2z^2, z^2x^2 + z^2y^2,$ $zx^2z + zy^2z, xz^2x + yz^2y, xzxz + yzyz, zxxz + zyyz$	41 products - 19 bases: 11 E_2 bases β can be constructed
$A_{2g} = A_{1g} \times A_{2g}$	$z^2 \times (xy - yx) = z^2xy - z^2yx, xyz^2 - yxz^2,$ $xz^2y - yz^2x, zxyz - zyzx, xzyz - yzxz, zxyz - zyzx$ $(x^2 + y^2) \times (xy - yx) = x^3y - x^2yx - y^3x + y^2xy,$ $x^3y - yx^3 - y^3x + xy^3, x^3y - xyx^2 - y^3x + yxy^2$	
$B_{1u} = B_{2u} \times A_{2u}$	$(y^3 - x^2y - yx^2 - xyx) \times z = y^3z - x^2yz - yxz^2 - xyxz,$ $y^2zy - x^2zy - yxxz - xyxz, yzy^2 - yxz^2 - xzyx - xzxy,$ $zy^3 - zx^2y - zyx^2 - zxyx$	
$B_{2g} = B_{1u} \times A_{2u}$	$(x^3 - y^2x - xy^2 - yxy) \times z = x^3z - y^2xz - xy^2z - yxyz,$ $x^2zx - y^2zx - xyzy - yxzy, xz^2x - yz^2y - yzyx - xzyx,$ $zx^3 - zy^2x - zxy^2 - zyxxy$	
$E_{1g} = E_{1u} \times A_{2u}$	$(x^3 + xy^2, y^3 + yx^2) \times z = (x^3z + xy^2z, y^3z + yx^2z),$ $(x^3z + yxyz, y^3z + xyxz), (x^3z + y^2xz, y^3z + x^2yz),$ $(x^2zx + y^2zx, y^2zy + x^2zy), (x^2zx + xyzy, y^2zy + yxxz),$ $(x^2zx + yxzy, y^2zy + xyzx), (xzx^2 + yzxy, yzy^2 + xzyx),$ $(xzx^2 + yzyx, yzy^2 + xzxy), (xzx^2 + xzy^3, yzy^2 + yzx^2),$ $(zx^3 + xzy^2, zy^3 + zyx^2), (zx^3 + zyxy, zy^3 + zxyx),$ $(zx^3 + zy^2x, zy^3 + xz^2y)$	32 products - 8 bases: 12 E_1 bases β can be constructed
$E_{2g} = E_{2g} \times A_{1g}$	$(x^2 - y^2, xy + yx) \times z^2 = (x^2z^2 - y^2z^2, xyz^2 + yxz^2),$ $(z^2x^2 - z^2y^2, z^2xy + z^2yx), (zx^2z - zy^2z, zxyz + zyxz),$ $(xz^2x - yz^2y, yz^2x + xz^2y), (xzxz - yzyz, xzyz + yzxz),$ $(zxzx - zyzy, zxyz + zyzx)$	
$= B_{1u} \times E_{1u}$	$(x^3 - y^2x - xy^2 - yxy) \times (x, y) =$ $= (x^4 - y^2x^2 - xy^2x - yxyx, x^3y - y^2xy - xy^3 - yxy^2)$	
$B_{1u} \times E_{1u}$	$(x^4 - y^4, x^3y + y^3x), (x^2y^2 - y^2x^2, x^2yx + y^2xy),$ $(xy^2x - yx^2y, xyx^2 + yxy^2),$ $(xyxy - yxyx, yx^3 + xy^3)$	

(+) Of the E bases only those containing A and B products are listed.

(*) To obtain simpler bases Wigner's theorem is used to construct $x^4 - y^4$, $x^3y - y^3x$ and $x^2y - y^2x$; permutation yields the others.

TABLE X. - Polar fourth order tensor.

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
D_{6h}	A_{1g}	A_{1g}	z^4 $x^4 = y^4 = y^2x^2 + xy^2x + yxyx$, $y^2x^2 = x^2y^2$, $xy^2x = yx^2y$, $yxyx = xyxy$ $x^2z^2 = y^2z^2$, $z^2x^2 = z^2y^2$, $zx^2z = zy^2z$, $xz^2x = yz^2y$, $xxzx = yzyz$, $zxzx = zyzy$
C_{6h}	A_g	A_{1g}, A_{2g}	z^4 $x^4 = y^4 = y^2x^2 + xy^2x + yxyx$, $y^2x^2 = x^2y^2$, $xy^2x = yx^2y$, $yxyx = xyxy$ $x^2z^2 = y^2z^2$, $z^2x^2 = z^2y^2$, $zx^2z = zy^2z$, $xz^2x = yz^2y$, $xxzx = yzyz$, $zxzx = zyzy$ $xyz^2 = -yxxz$, $z^2xy = -z^2yx$, $zxzy = -zyxz$, $yz^2x = -xz^2y$, $xzyz = -yzxz$, $zxzy = -zyzx$ $x^3y = -y^3x = y^2xy + xy^3 + yxy^2$, $y^2xy = -x^2yx$, $xy^3 = -yx^3$, $yxy^2 = -xyx^2$
S_6	see table IV	see table IV	z^4 $x^4 = y^4 = y^2x^2 + xy^2x + yxyx$, $y^2x^2 = x^2y^2$, $xy^2x = yx^2y$, $yxyx = xyxy$ $x^2z^2 = y^2z^2$, $z^2x^2 = z^2y^2$, $zx^2z = zy^2z$, $xz^2x = yz^2y$, $xxzx = yzyz$, $zxzx = zyzy$ $xyz^2 = -yxxz$, $z^2xy = -z^2yx$, $zxzy = -zyxz$, $yz^2x = -xz^2y$, $xzyz = -yzxz$, $zxzy = -zyzx$ $x^3y = -y^3x = y^2xy + xy^3 + yxy^2$, $y^2xy = -x^2yx$, $xy^3 = -yx^3$, $yxy^2 = -xyx^2$ $y^3z = -yx^2z = -xyxz = -x^2yz$, $y^2zy = -x^2zy = -yxzx = -xyzx$, $yzzy = -xzyx = -xzyx = -yzx^2$, $zy^3 = -zyx^2 = -zxyx = -zx^2y$ $x^3z = -xy^2z = -yxyz = -y^2xz$, $x^2zx = -y^2zx = -xyzy = -yxzy$, $xxz^2 = -yzxy = -zyyx = -xzy^2$, $zx^3 = -zxy^2 = -zyxy = -zy^2x$
D_{3d}	see table IV	see table IV	z^4 $x^4 = y^4 = y^2x^2 + xy^2x + yxyx$, $y^2x^2 = x^2y^2$, $xy^2x = yx^2y$, $yxyx = xyxy$ $x^2z^2 = y^2z^2$, $z^2x^2 = z^2y^2$, $zx^2z = zy^2z$, $xz^2x = yz^2y$, $xxzx = yzyz$, $zxzx = zyzy$ $y^3z = -yx^2z = -xyxz = -x^2yz$, $y^2zy = -x^2zy = -yxzx = -xyzx$, $yzzy = -xzyx = -xzyx = -yzx^2$, $zy^3 = -zyx^2 = -zxyx = -zx^2y$

The tensor distinguishes those and only those symmetry classes that axial third order tensors distinguish.

TABLE XI. — Axial fourth order tensor (²⁶).

Group	Representation of interest	Corresponding representations of D_{6h}	Independent non-zero components
D_6	see table V	see table V	z^4 $x^4 = y^4 = y^2x^2 + xy^2x + yxyx$, $y^2x^2 = x^2y^2$, $xy^2x = yx^2y$, $yxyx = xyxy$ $x^2z^2 = y^2z^2$, $z^2x^2 = z^2y^2$, $zx^2z = zy^2z$, $xz^2x = yz^2y$, $xxzx = yzyz$, $zxzx = zyzy$
C_{6v}	see table V	see table V	$xyz^2 = -yxz^2$, $z^2xy = -z^2yx$, $zxyz = -zyxz$, $yz^2x = -xz^2y$, $xzyz = -yzxz$, $zxzy = -zyzx$ $x^3y = -y^3x = y^2xy + xy^3 + yxy^2$, $y^2xy = -x^2yx$, $xy^3 = -yx^3$, $xyy^2 = -xyx^2$,
C_6	see table V	see table V	those of D_6 and C_{6v}
D_{3h}	A_1''	A_{1u} , B_{1g}	$y^3z = -yx^2z = -xyxz = -x^2yz$, $y^2zy = -x^2zy = -yxzx = -xyzx$, $yzzy^2 = -xzyx = -zxxy = -yzx^2$, $zy^3 = -zyx^2 = -zxyx = -zx^2y$
D_3	see table V	see table V	those of D_6 and D_{3h}
C_{3h}	A''	A_{1u} , A_{2u} , B_{1g} , B_{2g}	$y^3z = -yx^2z = -xyxz = -x^2yz$, $y^2zy = -x^2zy = -yxzx = -xyzx$, $yzzy^2 = -xzyx = -zxxy = -yzx^2$, $zy^3 = -zyx^2 = -zxyx = -zx^2y$ $x^3z = -xy^2z = -yxyz = -y^2xz$, $x^2zx = -y^2zx = -xyzy = -yxzy$, $xxz^2 = -yzxy = -yzyx = -xzy^2$, $zx^3 = -zxy^2 = -zyxy = -zy^2x$
C_{3v}	see table V	see table V	$xyz^2 = -yxz^2$, $z^2xy = -z^2yx$, $zxyz = -zyxz$, $y^2x = -xz^2y$, $xzyz = -yzxz$, $zxzy = -zyzx$ $x^3y = -y^3x = y^2xy + xy^3 + yxy^2$, $y^2xy = -x^2yx$, $xy^3 = -yx^3$, $xyy^2 = -xyx^2$ $x^3z = -xy^2z = -yxyz = -y^2xz$, $x^2zx = -y^2zx = -xyzy = -yxzy$, $xxz^2 = -yzxy = -yzyx = -xzy^2$, $zx^3 = -zxy^2 = -zyxy = -zy^2x$
C_3	see table V	see table V	those of D_6 , C_{6v} and C_{3h}

The tensor vanishes identically in the centrosymmetrical classes D_{6h} , C_{6h} , S_6 , D_{3d} .

TABLE XII. - Photoelastic constants in C_{6h} , C_6 , C_{3h} and S_6 , C_3 .Photoelastic constants: fourth order polar tensor pq ($p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

C_{6h} , C_6 , C_{3h}						S_6 , C_3					
11	12	13	0	0	16	11	12	13	14	15	16
12	11	13	0	0	-16	12	11	13	-14	-15	-16
31	31	33	0	0	0	31	31	33	0	0	0
0	0	0	44	45	0	41	-41	0	44	45	46
0	0	0	-45	44	0	-46	46	0	-45	44	41
-16	16	0	0	0	$1/2(11-12)$	-16	16	0	-15	14	$1/2(11-12)$

The schemes of POCKELS⁽¹⁷⁾, recently reobtained by BOND⁽¹⁴⁾ and by MASON⁽¹⁸⁾, are wrong for the ten classes C_4 , S_4 , C_{4h} , C_3 , S_6 , C_{3h} , C_6 , C_{6h} , T and T_h : attention to the incorrectness of Pockels' constants for these classes was called by BHAGAVANTAM⁽²⁰⁾. A derivation of the correct schemes for symmetries C_4 , S_4 , C_{4h} , T and T_h was given in ref. 16 *a*, section 3 *b*.

4. - The basic elements of group theory are a useful tool for treating systematically tensor properties of symmetrical material systems. They allow one to obtain almost simultaneously the results in a symmetry group and in its subgroups; and to use results established in a given group for lower order tensors to study higher order ones, in the same group. Typical features of the treatment in each specific case are the clearcut distinction of vanishing and non-vanishing tensor components and the simplicity of the equations obtained among the latter: these features are particularly advantageous for high order tensors and for complicated groups.

Acknowledgments.

The encouragement and sponsorship of this research by Professor F. SEITZ is gratefully acknowledged. The writer wishes also to thank Professor S. BHAGAVANTAM, F. A. Sc., Osmania University, India and Professor W. G. CADY, California Institute of Technology, U.S.A., for their kind interest in this work, as well as Dr. H. J. JURETSCHKE, Polytechnic Institute of Brooklyn, U.S.A., for correspondence. He is indebted to the Graduate College of the University of Illinois for the award of a Post-Doctoral Fellowship (1949-50) and of a Research Associateship in Physics (first semester 1950-51).

RIASSUNTO (*)

Si dimostra che la teoria dei gruppi permette di ottenere agevolmente le componenti cartesiane ortogonali indipendenti delle proprietà tensoriali dei sistemi materiali a simmetria finita. Si applica il metodo ai tensori polari e assiali del secondo, terzo e quarto ordine non dotati di simmetria intrinseca nei gruppi trigonali ed esagonali e si raccolgono in tabelle i risultati finali.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

Interazioni non localizzabili - Esempio dell'effetto Compton. (*)

R. ASCOLI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 9 Giugno 1952)

Riassunto. — Si sviluppa il metodo proposto da G. WATAGHIN per introdurre nella teoria dei campi il concetto della non localizzabilità delle interazioni. Determinati gli invarianti da cui dipendono i fattori di taglio che derivano dall'applicazione del metodo, si ricavano espressioni per calcolarli. Come esempio viene svolto lo studio dell'effetto Compton.

1. — In una lettera dello scorso anno ⁽¹⁾ G. WATAGHIN ha proposto una modificazione alla teoria dei campi, in cui si ammette che il contributo recato da ciascun punto dello spazio-tempo all'elemento di matrice corrispondente ad una interazione non dipende solo dai valori delle funzioni d'onda nel punto, ma da quelli in un dominio che abbraccia il punto; il dominio è assegnato in modo invariante e simmetrico rispetto alle particelle incidenti, mediante la sua definizione spaziale e temporale in un loro sistema baricentrico ⁽²⁾. Nel presente lavoro, supponendo valido il solito metodo delle perturbazioni, si mostra la via da seguire per l'applicazione della teoria allo studio di qualsiasi processo elettromagnetico, e si esamina in particolare come esempio il caso dell'effetto Compton.

(*) Lavoro estratto dalla tesi di laurea in fisica, discussa il 12 dicembre 1951 presso l'Università di Torino.

⁽¹⁾ G. WATAGHIN: *Nuovo Cimento*, **8**, 592 (1951). Vedi anche: *Zeits. f. Phys.*, **88**, 92 (1934) e **92**, 547 (1935). Sull'argomento vedi inoltre: J. RAYSKI: *Phil. Mag.*, **42**, 1289 (1951); C. MÖLLER e P. KRISTENSEN: *Danske Mat. Phys. Acad.* (in corso di pubblicazione); C. MÖLLER: *Rep. of Int. Conf. of elementary particles* (Bombay, dicembre 1950) p. 163.

⁽²⁾ L'operatore di interazione dipende perciò, attraverso la definizione del sistema baricentrico, dagli impulsi delle particelle interagenti.

Ci limiteremo a studiare l'interazione tra onde piane incidenti ed emergenti (matrice S). Usando per semplicità la seconda quantizzazione solo per il campo elettromagnetico e riferendoci alla rappresentazione in cui le x_μ sono diagonal, chiamiamo $\psi_i(x_\mu)$ le funzioni d'onda relativistiche degli elettroni e $A_\mu(x_\mu)$ l'operatore corrispondente ai fotoni nell'immagine di Heisenberg. Ammetteremo che i prodotti tra tali funzioni d'onda e l'operatore A_μ che compaiono negli elementi di matrice hamiltoniana corrispondenti a ciascuna delle interazioni elementari (nodi dei grafici di Feynman) nelle quali si scompone qualsiasi processo, debbano essere calcolati con la regola (vedi ⁽¹⁾):

$$(1) \quad \int d^4\eta_{1\mu} \int d^4\eta_\mu D(\eta_\mu) \bar{\psi}_a(\xi_\mu + \eta_\mu) A(\xi_\mu - \eta_\mu) D_1(\eta_{1\mu}) \psi_b(\xi_\mu + \eta_{1\mu}) \quad (3),$$

se le particelle incidenti (assorbite) sono il fotone e l'elettrone di indice a (di energia positiva o negativa), ed è emesso l'elettrone b ; con la regola:

$$(1') \quad \int d^4\eta_{1\mu} \int d^4\eta_\mu D_1(\eta_{1\mu}) \bar{\psi}_a(\xi_\mu + \eta_{1\mu}) D(\eta_\mu) A(\xi_\mu - \eta_\mu) \psi_b(\xi_\mu + \eta_\mu),$$

se l'unica particella incidente è l'elettrone a (di energia positiva o negativa), mentre sono emessi l'elettrone b e il fotone; $D(\eta_\mu)$ (e altrettanto $D_1(\eta_\mu)$) è una funzione universale del vettore η_μ , e tale che $\int d^4\eta_\mu D(\eta_\mu) = 1$. Poichè abbiamo supposto determinati gli impulsi delle particelle, le particelle incidenti (sopra definite) determinano sistemi baricentrici, cioè tali che la parte spaziale dell'impulso totale vi è nulla; ammetteremo che in tali sistemi $D(\eta_\mu)$ abbia, rispetto all'origine, simmetria sferica nello spazio, e simmetria nel tempo, e si possa quindi scrivere $D(\eta_\mu) = D(\eta, |\eta_0|)$, dove $\eta = |\boldsymbol{\eta}|$, e si indicano con sottolineatura le grandezze relative a un sistema baricentrico. Si suppone poi che $D(\eta_\mu)$ sia sensibilmente diversa da 0 solo quando η e η_0 sono in ordine di grandezza minori o uguali a una lunghezza universale l .

Ponendo nella (1) $A(x_\mu) = a \exp[-ik_\mu x_\mu]$, $\psi_i(x_\mu) = u_i \exp[ip_i x_\mu]$ si ottiene

$$\bar{u}_a u_b \exp[i(-p_{a\mu} - k_\mu + p_{b\mu})\xi_\mu] \int d^4\eta_\mu D(\eta_\mu) \cdot \exp[-i(p_{a\bar{\mu}} - k_\mu)\eta_\mu] \int d^4\eta_{1\mu} D_1(\eta_{1\mu}) \exp[ip_{b\mu}\eta_{1\mu}].$$

Posto

$$(2) \quad \int d^4\eta_\mu D(\eta_\mu) \exp[ip_\mu \eta_\mu] = G(p_\mu), \quad \int d^4\eta_{1\mu} D_1(\eta_{1\mu}) \exp[ip_\mu \eta_{1\mu}] = G_1(p_\mu),$$

(3) Abbiamo posto $\bar{\psi}(x_\mu) = \psi^*(x_\mu)\gamma_4$ e $A(x_\mu) = A_\mu(x_\mu)\gamma_\mu$ dove γ_μ sono le matrici di Dirac. Inoltre si usa un sistema di unità in cui $\hbar = 1$, $c = 1$.

si ha

$$(3) \quad \bar{u}_a a u_b \exp [i(-p_{a\mu} - k_\mu + p_{b\mu})\xi_\mu] G(p_{a\mu} - k_\mu) G_1(p_{b\mu}) = \\ = \bar{\psi}_a(\xi_\mu) A(\xi_\mu) \psi_b(\xi_\mu) G(p_{a\mu} - k_\mu) G_1(p_{b\mu}).$$

Analogamente nella (1'), posto $A(x_\mu) = a^* \exp [ik_\mu x_\mu]$, $\psi_i(x_\mu) = u_i \exp [ip_{i\mu} x_\mu]$, si ottiene

$$(3') \quad \bar{u}_a a^* u_b \exp [i(-p_{a\mu} + k_\mu + p_{b\mu})\xi_\mu] G_1(p_{a\mu}) G(p_{b\mu} - k_\mu) = \\ = \bar{\psi}_a(\xi_\mu) A(\xi_\mu) \psi_b(\xi_\mu) G_1(p_{a\mu}) G(p_{b\mu} - k_\mu).$$

Per l'uso delle formule (1), (1') e (3), (3') è indispensabile osservare che uno stato intermedio i , e quindi il suo vettore di propagazione $p_{i\mu}^s$, è diverso a seconda del sistema di riferimento S in cui si applica il metodo delle perturbazioni. Converremo di scegliere lo stato di vettore $p_{i\mu}^s$ che si ottiene in un sistema baricentrico delle particelle incidenti, essendo questa l'unica prescrizione determinata in modo invariante e simmetrico rispetto alle particelle incidenti.

Le (3), (3') sono le formule che useremo per il calcolo di elementi di matrice. Esse mostrano che effettuare il prodotto con le regole (1), (1') equivale, nel caso delle onde piane, ad applicare i fattori di taglio G e G_1 , dipendenti dagli impulsi, al risultato del prodotto ordinario.

2. - La funzione G (e altrettanto la G_1), definita dalla (2), dovendo essere invariante, conterrà gli impulsi sotto forma di invarianti. È utile vedere quali siano questi invarianti nell'ipotesi fatta che $D(\eta_\mu)$ abbia simmetria sferica nello spazio e sia simmetrica nel tempo rispetto all'origine. Si ha infatti applicando la (2) in un sistema baricentrico:

$$G(p_\mu) = \int d^4\eta_\mu \exp [ip_\mu \eta_\mu] D(\underline{\eta}, |\underline{\eta}_0|) = \int d^3x \exp [-i\underline{p} \times \underline{\eta}]. \\ \cdot \int d\underline{x}_0 D(\underline{\eta}, |\underline{\eta}_0|) \exp [i\underline{p}_0 \eta_0] = \int d^3x \exp [-i\underline{p} \times \underline{\eta}] F(\underline{\eta}, \underline{p}_0),$$

dove la $F(\underline{\eta}, \underline{p}_0)$ è simmetrica in \underline{p}_0 perchè trasformata di Fourier nel tempo di una funzione di $|\eta_0|$, e dipende inoltre solo da $\underline{\eta}$. La $G(p_\mu)$, essendo trasformata di Fourier nello spazio di una funzione a simmetria sferica, avrà simmetria sferica rispetto all'origine delle \underline{p} , e dipenderà quindi solo da $\underline{p} - |\underline{p}|$ oltre che da $|\underline{p}_0|$. Potremo quindi porre $G(p_\mu) = G(\underline{p}, |\underline{p}_0|)$. Per avere un'espressione utilizzabile in qualsiasi sistema di riferimento, chiamata P_μ la somma dei vettori delle particelle incidenti, si può osservare che per defi-

nizione si ha in un sistema baricentrico di tali particelle $\underline{P} = 0$, e quindi

$$(4) \quad |\underline{p}_0| = \left| \frac{\underline{p}_i \underline{P}_0}{\underline{P}_0} \right| = \frac{|p_i P_\mu|}{\sqrt{P_\mu P_\mu}}; \quad |\underline{P}| = \sqrt{\underline{p}_0^2 - p_i p_i} = \sqrt{\frac{(p_i P_\mu)^2}{P_\mu P_\mu} - p_i p_i}.$$

È questa un'espressione generale degli invarianti da cui dipendono i fattori di taglio nella ipotesi fatta (4).

Nel caso in cui alcuni degli impulsi che compaiono nelle (4) corrispondono a particelle virtuali, è comodo calcolare $|\underline{p}_0|$ e $|\underline{P}|$ determinando per ogni particella anziché il vettore di propagazione $p_{i\mu}^B$, un vettore $p_{i\mu}$ che abbia di questo la stessa parte spaziale, e tale che per ogni interazione elementare si possa scrivere una relazione del tipo $\sum \pm p_{i\mu} = 0$, dove il segno + corrisponde ad emissione e il — ad assorbimento (5).

Poichè $\underline{p}_i^B = \underline{p}_i$, la seconda delle (4) vale anche sostituendo ai vettori di propagazione i vettori $p_{i\mu}$ ora definiti. Per una particella di massa m si ha poi:

$$p_{i0}^B = \pm \sqrt{p_i^2 + m^2} = \pm \sqrt{\frac{(p_{i\mu} P_\mu)^2}{P_\mu P_\mu} - p_{i\mu} p_{i\mu} + m^2}.$$

Nel caso della (1) e (3) si ha $P_\mu = p_{a\mu} + k_\mu$, e quindi, essendo $\underline{p}_a = \underline{k}$, i fattori di taglio assumono la forma

$$\begin{aligned} (6) \quad G(p_{a\mu} - k_\mu) &= G(|\underline{p}_a - \underline{k}|, |\underline{p}_{a0} - \underline{k}_0|) = \\ &= G\left(\sqrt{\frac{(p_{a\mu} - k_\mu)(p_{a\mu} + k_\mu)^2}{(p_{a\mu} + k_\mu)^2}} - (p_{a0} - k_0)^2, \sqrt{\frac{(p_{a\mu}(p_{a\mu} + k_\mu))^2}{(p_{a\mu} + k_\mu)^2} - p_{a0}^2 + m^2} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{(k_\mu(p_{a\mu} + k_\mu))^2}{(p_{a\mu} + k_\mu)^2} - p_{a0}^2}\right) \\ &= G\left(2\sqrt{\frac{(p_{a\mu} k_\mu)^2 - p_{a\mu}^2 k_\mu^2}{p_{a\mu}^2 + k_\mu^2 + 2p_{a\mu} k_\mu}}, \sqrt{\frac{(p_{a\mu} k_\mu)^2 - p_{a\mu}^2 k_\mu^2}{p_{a\mu}^2 + k_\mu^2 + 2p_{a\mu} k_\mu}} + m^2 \pm \sqrt{\frac{(p_{a\mu} k_\mu)^2 - p_{a\mu}^2 k_\mu^2}{p_{a\mu}^2 + k_\mu^2 + 2p_{a\mu} k_\mu}}\right), \\ (7) \quad G_1(p_{b\mu}) &= G_1(0, m), \end{aligned}$$

dove vale il segno — se a è un elettrone, il segno + se è un positrone.

Nel caso dalla (1') o (3') si hanno formule analoghe in cui l'indice a è sostituito da quello b .

(4) Si noti che l'espressione generale ottenuta per i fattori di taglio contiene come caso particolare quello importante $G(p_\mu p_\mu)$, usato, per esempio, recentemente da J. RAYSKI: *Phil. Mag.*, **42**, 1289 (1951).

(5) Sono questi vettori che si usano correntemente nella teoria dei campi, per esempio nella formulazione di Feynman.

Si noti che affinchè le formule ottenute tendano a quelle ordinarie quando gli impulsi tendono a 0, è necessario che sia $G(0, m) = 1$, $G_1(0, m) = 1$ ⁽⁶⁾.

Osserviamo inoltre che se si scegliessero le funzioni $D(\eta_\mu)$ e $D_1(\eta_\mu)$ in modo che fossero diverse da 0 solo in un dominio spaziale, i fattori di taglio $G(p_\mu)$ e $G_1(p_\mu)$ dipenderebbero solo dalla parte spaziale \mathbf{p} di p_μ . Quindi nella (6) non sarebbe necessaria la distinzione tra il caso di elettroni e quello di positroni, e nella (7) sarebbe senz'altro $G_1(p_{b\mu}) = 1$. Non sarebbe poi necessario precisare, per l'uso delle (1), (1'), (3), (3') il sistema di riferimento in cui applicare il metodo delle perturbazioni per ottenere i vettori corrispondenti agli stati intermedi, in quanto la parte spaziale di tali vettori non dipende dal sistema di riferimento suddetto.

3. - A titolo di esempio applichiamo il procedimento esposto al caso particolarmente semplice dell'effetto Compton.

Contrassegnando con l'indice a le grandezze relative all'elettrone e al fotone incidenti, con b quelle relative all'elettrone e fotone emessi, con c e d rispettivamente quelle relative all'elettrone dello stato intermedio nelle due modalità del processo che corrispondono ai grafici di Feynman I e II di fig. 1, occorre calcolare l'elemento di matrice

$$H' = H'_I + H'_{II} = \sum_c \frac{\langle \bar{\psi}_a, 1k_a | A | \psi_c \rangle \langle \bar{\psi}_c | A | \psi_b, 1k_b \rangle}{E_a - E_c} + \\ + \sum_d \frac{\langle \bar{\psi}_a, 1k_a | A | \psi_d, 1k_d \rangle \langle \bar{\psi}_d | A | \psi_b, 1k_b \rangle}{E_a - E_d},$$

dove i vettori di stato sono contrassegnati dalla funzione d'onda elettronica e dal numero dei quanti presenti di dato impulso.

Eseguendo i prodotti con le regole (3), (3'), si ottiene l'elemento di matrice \bar{H}' :

$$\bar{H}' = H'_I G(p_{a\mu} - k_{a\mu}) G_1^2(p_{c\mu}) G(p_{b\mu} - k_{b\mu}) + \\ + H'_{II} G_1(p_{a\mu}) G(p_{d\mu} - k_{b\mu}) G(p_{d\mu} - k_{a\mu}) G_1(p_{b\mu}).$$

Per applicare le (6), (7) scomponiamo innanzitutto H'_{II} nelle parti H'_{II-} e H'_{II+} corrispondenti rispettivamente a stati intermedi elettronici e positro-

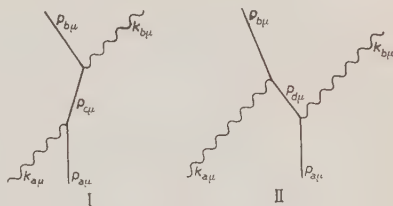


Fig. 1. - I e II diagramma di Feynman per l'effetto Compton.

⁽⁶⁾ Vedi J. RAYSKI: *Phil. Mag.*, **42**, 1289 (1951).

nici. Si ha poi: $p_{a\mu}^2 - p_{b\mu}^2 = m^2$, $k_{a\mu}^2 = k_{b\mu}^2 = 0$; dalla legge di conservazione $p_{a\mu} + k_{a\mu} = p_{b\mu} + k_{b\mu}$, si ottiene inoltre $p_{a\mu}k_{c\mu} = p_{b\mu}k_{b\mu}$, $p_{a\mu}k_{e\mu} = p_{b\mu}k_{a\mu}$. Si ha quindi:

$$(8) \quad \bar{H}' = H'_I G^2 \left(\frac{2p_{a\mu}k_{a\mu}}{\sqrt{m^2 + 2p_{a\mu}k_{a\mu}}}, \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + 2p_{a\mu}k_{a\mu}}} \right) G_1^2(0, m) + \\ + \left(H'_{II-} G^2 \left(\frac{2p_{a\mu}k_{b\mu}}{m}, \frac{\sqrt{(p_{a\mu}k_{b\mu})^2 + m^4} - p_{a\mu}k_{b\mu}}{m} \right) + \right. \\ \left. + H'_{II+} G^2 \left(\frac{2p_{a\mu}k_{b\mu}}{m}, \frac{\sqrt{(p_{a\mu}k_{b\mu})^2 + m^4} + p_{a\mu}k_{b\mu}}{m} \right) \right) G_1^2(0, m).$$

Per avere risultati facilmente utilizzabili è necessario partire dalla conoscenza degli impulsi in un sistema di riposo dell'elettrone incidente, in quanto questo coincide con un sistema di laboratorio quando si esegue l'esperienza nel solito modo.

Si ha allora $p_a = 0$, $p_b = m$, da cui $p_{a\mu}k_{a\mu} = mk_a$; $p_{a\mu}k_{b\mu} = mk_b$, quindi

$$\bar{H}' = \left(H'_I G^2 \left(\frac{2mk_a}{\sqrt{2mk_a + m^2}}, \frac{m^2}{\sqrt{2mk_a + m^2}} \right) + \right. \\ \left. + H'_{II-} G^2(2k_b, \sqrt{k_b^2 - m^2} - k_b) + H'_{II+} G^2(2k_b, \sqrt{k_b^2 + m^2} + k_b) \right) G_1^2(0, m).$$

Supposto $G_1(0, m) = 1$, abbiamo per alti impulsi k_a del quanto incidente ($k_a \gg m$):

$$(9) \quad \bar{H}' \cong H'_I G^2(\sqrt{2mk_a}, 0) + H'_{II-} G^2(2k_b, 0) + H'_{II+} G^2(2k_b, 2k_b).$$

Si vede di qui che l'elemento di matrice H'_I nel quale l'emissione « segue » l'assorbimento è affetto da un fattore di taglio, dipendente dall'energia del fotone incidente, che si discosta sensibilmente da 1 solo quando sia $\sqrt{2mk_a} \gtrsim \gtrsim 1/l \cong 140 \text{ MeV}/c$ cioè $k_a \gtrsim 40 \text{ GeV}/c$.

Gli elementi di matrice H'_{II+} e H'_{II-} nei quali l'emissione « precede » l'assorbimento, e che sono i soli importanti nel caso di assorbimento di fotoni di alta energia con emissione di fotoni di bassa energia, sono invece affetti da fattori di taglio dipendenti dall'energia del fotone emesso; non si ha quindi « taglio » sensibile nel caso di emissione di fotoni di bassa energia, qualunque sia l'energia del fotone incidente purchè sufficientemente grande, mentre si avrebbe « taglio » se l'energia del fotone emesso diventasse dell'ordine dei 140 MeV.

4. - Le regole poste a base del procedimento proposto forniscono un metodo applicabile allo studio di qualsiasi processo elettromagnetico. È chiaro che

pur di scegliere opportunamente la funzione $D(\eta_\mu)$ è possibile ottenere la « convergenza » di tutti i processi del calcolo delle perturbazioni. Il metodo proposto presenta il vantaggio di ottenere il risultato in modo sistematico e di essere basato su un motivo fisico anzichè su artifici analitici. Si differenzia inoltre dagli altri metodi perchè il « taglio » viene introdotto in ogni « nodo » dei grafici di Feynman, anzichè ai soli « lati » che danno luogo a termini divergenti; segue da ciò che esso opera su ogni processo al quale prendano parte particelle di sufficiente energia.

L'esempio dell'effetto Compton mostra che i fattori di taglio possono produrre risultati assai diversi sugli elementi di matrice corrispondenti alle diverse « modalità » con cui può avvenire uno stesso processo. È notevole in particolare che la probabilità di emissione di particelle di bassa energia possa non essere influenzata sensibilmente dai fattori di taglio, comunque grande sia l'energia della particella incidente.

Nel caso dell'effetto Compton i fattori di taglio non portano evidentemente alcuna modificazione nel campo di energie nel quale è possibile l'esperienza; lo studio di altri fenomeni potrà permettere un confronto con dati sperimentali.

Ringrazio il prof. G. WATAGHIN per il costante interessamento e per le discussioni avute sull'argomento.

SUMMARY

The author develops the method proposed by G. WATAGHIN to introduce the idea of non-local interactions in field theory. The invariants have been determined, on which the cut-off factors deriving from the application of the method, depend. Expressions have been deduced to calculate such invariants. For an example the method has been applied to Compton effect.

Ionization at relativistic energies and polarization effects.

M. HUYBRECHTS and M. SCHÖNBERG

Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles

(ricevuto il 17 Giugno 1952)

Summary. — A theory of the polarization effects in the energy loss of a charged particle is given, in which the mechanism of the loss is different from that of the Fermi theory. This theory leads to a distribution of the loss between ionization-excitation and emission of Cerenkov radiation which differs considerably from that of the theories on Fermi's lines, although the stopping power is not essentially changed, being somewhat less than in those theories. This treatment leads to an increase of the direct ionization at impact parameters larger than atomic dimensions after the relativistic minimum, the increase being large in the case of gases. The Fermi saturation effect of the loss at distances larger than atomic dimensions does also exist in the present theory, although due to a different mechanism. The relativistic increase of the loss in distant interactions is due largely to an increase of the radii of action for ionization and excitation (Bohr-Williams mechanism), but there is also a contribution of the Cerenkov radiation (Fermi mechanism). The saturation arises from a limitation of the increase of the radii of action due to the polarization of the medium and to the saturation of the emission of Cerenkov radiation. This theory leads to a modification of the formula of Frank and Tamm for the rate of emission of Cerenkov radiation, the emission of high energy Cerenkov radiation being considerably reduced.

Introduction.

1. — The first analysis of the polarization effects in the theory of ionization is due to FERMI⁽¹⁾. FERMI's work was extended and improved by WICK⁽²⁾,

(1) E. FERMI: *Phys. Rev.*, **57**, 485 (1940).

(2) G. C. WICK: *Ric. Scient.*, **11**, 273 (1940); **12**, 858 (1941), *Nuovo Cimento*, **1**, 302 (1943).

HALPERN and HALL ⁽³⁾, A. BOHR ⁽⁴⁾ and SCHÖNBERG ^(5,6). With the exception of A. BOHR's paper, all the above papers follow the line of FERMI's analysis. The work of FERMI, WICK and HALPERN and HALL had mainly in view the saturation of the rate of loss due to distant interactions, although in FERMI's paper it is indicated that the Cerenkov radiation is included in the loss. The importance of the Cerenkov radiation was first emphasized by A. BOHR ⁽⁴⁾, who showed by an intuitive argument, and also by using FERMI's results, that the whole increase of the loss at relativistic energies was accounted for by the emission of Cerenkov radiation. At that time this conclusion did not attract much attention, but, later on, OCCHIALINI's measurements ⁽⁷⁾ of the tracks of relativistic particles in photographic emulsions showed that there was no increase of the grain density with energy within the experimental errors (10%). These measurements have stimulated theoretical work on ionization and led MESSEL and RITSON ⁽⁸⁾ and SCHÖNBERG ⁽⁶⁾ to the same conclusions as A. BOHR, using FERMI's methods. SCHÖNBERG ⁽⁶⁾ has shown that the conclusion regarding the increase of the loss in the relativistic region was largely independent of the actual expression of the dielectric constant used in the Maxwell equations for the dispersive medium, but he remarked that such a conclusion might not hold in a rigorous quantum treatment and also that the spectrum of the Cerenkov radiation obtained from the theory of FRANK and TAMM ⁽⁹⁾ and FERMI ⁽¹⁾ required important quantum corrections.

The conclusions of the analysis of the polarization effects on Fermi's lines seemed sufficient to explain the experimental data of OCCHIALINI and the Bristol group ⁽¹⁰⁾, as well as those of BOWEN and ROSER ⁽¹¹⁾. However, recently, experimental data were obtained by VOYVODIC ⁽¹²⁾ and GOSH, JONES and WILSON ⁽¹³⁾ which cannot be explained by the theory on Fermi's lines, because it is necessary to assume an exceedingly strong absorption of the high

⁽³⁾ O. HALPERN and H. HALL: *Phys. Rev.*, **57**, 459 (1940); **73**, 477 (1948).

⁽⁴⁾ A. BOHR: *Det. Kgl. Dans. Vid. Sels.*, **24**, n. 19 (1948).

⁽⁵⁾ M. SCHÖNBERG: *Bull. Cent. Phys. Nucl. Brux.*, n. 20 (1950).

⁽⁶⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 159 (1951).

⁽⁷⁾ G. P. S. OCCHIALINI: *Congo Congress (Nuovo Cimento, Suppl.*, **6**, 377 (1949)).

⁽⁸⁾ H. MESSEL and D. M. RITSON: *Phil. Mag.*, **41**, 1129 (1950).

⁽⁹⁾ I. FRANK and I. TAMM: *Compt. Rend. Ac. Sci. USSR*, **14**, 109 (1937); I. TAMM: *Journ. of Phys. USSR*, **1**, 439 (1939).

⁽¹⁰⁾ P. H. FOWLER: *Phil. Mag.*, **41**, 169 (1950); U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

⁽¹¹⁾ T. BOWEN and F. X. ROSER: *Phys. Rev.*, **83**, 689 (1951).

⁽¹²⁾ L. VOYVODIC: *Bristol Conference* (1951); E. PICKUP and L. VOYVODIC: *Phys. Rev.*, **80**, 89 (1950).

⁽¹³⁾ S. G. GOSH, G. M. D. B. JONES and J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, **65**, 68 (1952).

energy Cerenkov radiation to get the experimental values of the increase of the ionization after the minimum. SCHÖNBERG pointed out that the emission of the high energy Cerenkov radiation would be improbable, according to quantum theory ⁽¹⁴⁾, and proposed a modification of Fermi's methods ⁽¹⁵⁾, which reduces considerably the intensity of the high energy Cerenkov bands and gives a larger amount of ionization. In this paper we shall work out in detail this modification of the Fermi theory and improve the formulas of reference ⁽¹⁵⁾.

In the existing theory, the polarization effects are taken into account by assuming that the ionizing particle moves in a classical homogeneous dispersive medium and using the solution of the Maxwell equations for such a medium given by FRANK and TAMM ⁽⁹⁾ and FERMI ⁽¹⁾. Actually the solution of the Maxwell equations is used to compute the energy loss due to interactions at distances larger than 10^{-8} cm, the loss at smaller distances being taken from the quantum theory of BETHE and BLOCH ⁽¹⁶⁾. This procedure, originally due to FERMI ⁽¹⁾, was never satisfactorily justified. It seems that the validity of the theorem of WILLIAMS ⁽¹⁷⁾ and BLOCH ⁽¹⁸⁾, concerning the equivalence of the classical and quantum methods of computing the average loss due to interactions at distances larger than atomic dimensions, has been extrapolated to the theory including polarization effects. Such an extrapolation is actually not justified, specially in the determination of the relative contributions of the ionization-excitation and the Cerenkov emission to the total loss. The relative contributions depend critically on the way in which the interactions between different atoms influence the resonance and non resonance transfers. It is shown by the formulas given in references (5) and (6) that the resonances are shifted from the oscillator frequencies ω_j to the zeros $\bar{\omega}_j$ of the dielectric constant $\epsilon(\omega)$; thus a range of frequencies preceding immediately an oscillator frequency ω_j becomes a non resonance region in which coherent emission of radiation is important. On the other hand, the shift of the resonance from ω_j to $\bar{\omega}_j$ and the fact that $\sqrt{1-\beta^2}$ is replaced by $\sqrt{1-\beta^2\epsilon(\bar{\omega})}$, in the Fermi theory, cancel completely the relativistic increase of the ionization-excitation loss, since $\sqrt{1-\beta^2\epsilon(\bar{\omega}_j)} = 1$. The shift of the resonance frequency ω_j is approximately $(4\pi ne^2/3m)(f_j/\omega_j)$, n being the number of electrons per unit volume, e and m the charge and the rest mass of the electron and f_j the oscillator percentual ($\sum f_j = 1$). In the neighbourhood of the path, the polarization

⁽¹⁴⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 210 (1952).

⁽¹⁵⁾ M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **9**, 372 (1952).

⁽¹⁶⁾ H. BETHE: *Zeits. f. Phys.*, **76**, 293 (1932); *Ann. d. Phys.*, **5**, 325 (1930); F. BLOCH: *Ann. d. Phys.*, **16**, 285 (1933); *Zeits. f. Phys.*, **81**, 363 (1933); C. MÖLLER: *Ann. d. Phys.*, **14**, 531 (1932); E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc., A* **135**, 108 (1932).

⁽¹⁷⁾ E. J. WILLIAMS: *Proc. Roy. Soc., A* **139**, 163 (1933).

effects are small and the total field is nearly the Lorentz transformed Coulomb field, hence the times of collision are essentially the same as in the Williams theory. The short times of collision do not allow such a sharpness of definition of the resonances as the classical theory requires, in order to separate the shifted resonance $\bar{\omega}_j$ from the peak of the corresponding Cerenkov band, because of the uncertainty principle. At distances of the order of $R = \sqrt{mc^2/4\pi ne^2}$ the polarization effects are strong and the times of collision become much larger than in the Williams theory, so that at such distances the classical theory may be applied. It will be shown that the amount of high energy Cerenkov radiation which remains, when polarization effects are neglected up to distances of the order of R , is rather small.

It results from the preceding considerations that, at distances from the path much smaller than R , the interaction between different atoms may be completely neglected, because the polarization is not large and the clean cut separation of the frequency ranges relevant for ionization-excitation and Cerenkov emission on both sides of an oscillator frequency ω_j is not allowed by the uncertainty principle. The adequate treatment in this interval of distances is therefore the Bethe-Bloch-Möller-Williams theory, which is actually equivalent to a classical theory with the oscillator model, in what regards the value of the average loss at distances larger than 10^{-8} cm.

Following strictly the lines of reference (¹⁵), we should apply the Bethe-Bloch-Möller-Williams theory up to the distance R , and a modified form of the Fermi theory at distances larger than R . This procedure is not very accurate, because the polarization effects are already considerable at distances somewhat less than R . It is, however, possible to introduce a correction to the results of the Bethe-Bloch-Möller-Williams theory for distances less than R , in order to take into account the non negligible polarization effects. Instead of solving the Maxwell equations for a dispersive medium by assuming the dispersive medium to occupy the entire space, as was done by FERMI, we shall first assume that there are no electrons up to the distance R and determine the solution of the Maxwell equations for a dispersive non homogeneous medium in which the dielectric constant has the value 1, at distances less than R , and the Lorentz value $\epsilon(\omega)$ at distances larger than R from the path. Thus we neglect the effects of the polarization at distances less than R in the computation of the field at distances larger than R . Our solution of the Maxwell equations allows us to determine with sufficient accuracy the effect of the polarization at distances larger than R on the field at distances less than R , and thus to correct the rate of loss obtained with the Bethe-Bloch-Möller-Williams methods.

In the theory developed in this paper, most of the relativistic increase of the loss comes from distances less than R , in which the polarization effects play a minor part, and it is mainly due to an increase of ionization and exci-

tation. The increase of loss due to interactions at distances larger than 10^{-8} cm is essentially due to the increase of the radii of action, i.e. to the Bohr-Williams mechanism limited to distances of the order of R . The upper limitation of the radii of action leads to saturation, whereas the indefinite increase of the radii, that appears when polarization effects are neglected, leads to the indefinite logarithmic increase of the Bethe-Bloch-Möller-Williams theory. The contribution of the distances larger than R includes the loss due to Cerenkov radiation and is small. This part of the loss also gets saturated, by the same mechanism as in the theory on Fermi's lines. The total rate of loss is often smaller in the present theory than in the corresponding one on Fermi's lines, there is also a very different distribution of the loss between ionization-excitation and Cerenkov radiation. The results of the present theory agree satisfactorily with the existing experimental data.

The solution of the Maxwell equations for the field created by the ionizing particle and the electrons lying at distances larger than R from the path is derived in section 2. The value of the loss due to transfers at distances larger than R is computed in section 3. The modification of the formula of Frank and Tamm is given in section 4. The contribution of the different oscillator frequencies to the ionization is discussed in sections 5 and 6.

The modifications of the Bethe-Bloch-Möller-Williams formulas due to the limitation of the impact parameters to R are given in section 7. The corrections due to the action of the field of the atoms lying at distances larger than R on the atoms at distances less than R are given in section 8. The quantum effects connected with the short times of collision are discussed in sections 9 and 10.

The application of the theory to the analysis of the experimental data of GOSH, WILSON and JONES and of VOYVODIC is given in section 12.

Modification of the Fermi solution of the Maxwell equations.

2. — In Fermi's theory, the energy transferred to the medium at distances larger than atomic dimensions is computed with the field determined by the Maxwell equations for a dispersive non magnetic medium of dielectric constant $\varepsilon(\omega)$:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\text{op}} \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \\ \text{div } \varepsilon_{\text{op}} \mathbf{E} = 4\pi j_0, & \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{cases}$$

ω denotes a circular frequency and the operator ε_{op} is:

$$(2) \quad \varepsilon_{\text{op}} = \varepsilon \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

\mathbf{E} and \mathbf{H} are the electric and magnetic field vectors, respectively. j_0 and $c\mathbf{j}$ are respectively the charge and current densities corresponding to the ionizing particle of charge z_1e moving with constant velocity \mathbf{v} along the x axis:

$$(3) \quad j_0 = z_1 e \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z), \quad \mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{c} j_0.$$

We shall use, instead of Fermi's fields $\mathbf{E}^{(F)}$ and $\mathbf{H}^{(F)}$, fields which satisfy the Maxwell equations for a non dispersive medium at distances from the path less than R

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^I}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H}^I - 4\pi \mathbf{j}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^I}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E}^I \\ \text{div } \mathbf{E}^I &= 4\pi j_0, & \text{div } \mathbf{H}^I &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\varrho = \sqrt{y^2 + z^2} < R), \\ &\left(R = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n e^2}} \right), \end{aligned}$$

and the Maxwell equations for a dispersive medium at distances from the path larger than R :

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{\text{op}} \mathbf{E}^{II} &= \text{rot } \mathbf{H}^{II}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{II}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathbf{E}^{II} \\ \text{div } \varepsilon_{\text{op}} \mathbf{E}^{II} &= 0, & \text{div } \mathbf{H}^{II} &= 0, \end{aligned} \right\} (\varrho > R).$$

We shall denote by C_ϱ the cylinder of radius ϱ with axis on the path. We must fit the solutions of (4) and (5) at the cylinder C_R . It is convenient to use cylindrical coordinates (ϱ, φ, x) , φ denoting the azimuthal angle around the path. By taking into account the well known formulas

$$(6) \quad \text{div } \mathbf{U} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho U_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_x}{\partial x};$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{U})_\varrho &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}, \\ (\text{rot } \mathbf{U})_\varphi &= \frac{\partial U_\varrho}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial \varrho}, & (\text{rot } \mathbf{U})_x &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho U_\varphi) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial U_\varrho}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right.$$

we get from (4) and (5) the following boundary conditions for the fields:

$$(8) \quad E_\varrho^I = \varepsilon_{\text{op}} E_\varrho^{II}, \quad E_\varphi^I = E_\varphi^{II}, \quad E_x^I = E_x^{II}, \quad \mathbf{H}^I = \mathbf{H}^{II} \quad (\varrho = R).$$

It is convenient to introduce potentials (A_0, \mathbf{A}) :

$$(9) \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } A_0, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

We shall denote by (A_0^I, \mathbf{A}^I) the potentials inside C_R and by $(A_0^{II}, \mathbf{A}^{II})$ the potentials outside C_R . The equations for the potentials are:

$$(10) \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \{ A_0^I, \mathbf{A}^I \} = 4\pi \{ j_0, \mathbf{j} \}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial A_0^I}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A}^I = 0,$$

$$(11) \quad \left(\frac{\varepsilon_{\text{op}}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \{ A_0^{II}, \mathbf{A}^{II} \} = 0, \quad \frac{\varepsilon_{\text{op}}}{c} \frac{\partial A_0^{II}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A}^{II} = 0.$$

Because of the geometrical symmetry of the problem, the vector potentials are parallel to the path

$$(12) \quad A_v = A_s = 0,$$

and the Lorentz conditions can be satisfied by taking

$$(13) \quad \mathbf{A}^I = \frac{\mathbf{v}}{c} A_0^I, \quad \mathbf{A}^{II} = \frac{\mathbf{v}}{c} \varepsilon_{\text{op}} A_0^{II},$$

since the potentials depend on x and t only through the combination $x - vt$.

The boundary conditions for the field (8) are satisfied, by taking:

$$(14) \quad (1 - \beta^2) \varepsilon_{\text{op}} A_x^I = (1 - \beta^2 \varepsilon_{\text{op}}) A_x^{II}, \quad \frac{\partial A_x^I}{\partial \varrho} = \frac{\partial A_x^{II}}{\partial \varrho} \quad \left(\varrho = R, \beta = \frac{v}{c} \right).$$

In the case of an absorbent medium, the condition that the fields vanish at infinity shows that we must take:

$$(15) \quad A_x^I = \frac{z_1 e}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) K_0(\varrho k(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega,$$

$$(16) \quad k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)), \quad k(-\omega) = k^*(\omega), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg k(\omega) < \frac{\pi}{2}$$

for $\omega > 0$.

$B(\omega)$ is determined by the boundary conditions (14). A_x^I must be of the

form:

$$(17) \quad A_x^1 = \frac{z_1 e}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\rho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega + \\ + \frac{iz_1 e}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) I_0(\rho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega, \quad \left(k_0(\omega) = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right).$$

The K and I are modified cylindrical functions:

$$(18) \quad K_\nu(u) = \frac{i\pi}{2} \exp[i\pi\nu/2] H_\nu^{(1)}(iu), \quad I_\nu(u) = \exp[-i\pi\nu/2] J_\nu(iu).$$

$C(\omega)$ is also determined by the boundary conditions (14). The first term in the right hand side of (17) is the x -component of the vector potential of the field created by the ionized particle moving in vacuum.

We get from (14):

$$(19) \quad B(\omega) K_0(Rk(\omega)) = \left[K_0(Rk_0(\omega)) + \frac{i\pi}{2} C(\omega) I_0(Rk_0(\omega)) \right] \frac{(1 - \beta^2)\varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2\varepsilon(\omega))},$$

$$(20) \quad B(\omega) k(\omega) K_1(Rk(\omega)) = \left[K_1(Rk_0(\omega)) - \frac{i\pi}{2} C(\omega) I_1(Rk_0(\omega)) \right] k_0(\omega).$$

By taking into account the well known relation

$$(21) \quad K_0(u) I_1(u) + K_1(u) I_0(u) = \frac{1}{u},$$

we get from (19) and (20):

$$(22) \quad B(\omega) = R^{-1} \left[K_1(Rk(\omega)) I_0(Rk_0(\omega)) k(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{1 - \beta^2\varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2\varepsilon(\omega))} K_0(Rk(\omega)) I_1(Rk_0(\omega)) k_0(\omega) \right]^{-1},$$

$$(23) \quad C(\omega) = \frac{2}{i\pi} \left[\frac{1 - \beta^2\varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2\varepsilon(\omega))} K_0(Rk(\omega)) B(\omega) - K_0(Rk_0(\omega)) \{ I_0(Rk_0(\omega)) \}^{-1} \right].$$

By taking into account the expressions

$$(24) \quad I_0(u) \cong 1, \quad I_1(u) \cong \frac{u}{2}, \quad K_0(u) \cong \log \frac{2}{\gamma u}, \quad K_1(u) \cong \frac{1}{u},$$

$$(24a) \quad (|u| \ll 1, \log \gamma = 0,577...),$$

and treating R as a variable parameter, we get:

$$(25) \quad \lim_{R \rightarrow 0} B(\omega) = 1.$$

We shall denote by $k_c(\omega)$ the limit of $k(\omega)$ as $v \rightarrow c$. It is easily seen that:

$$(26) \quad \lim_{v \rightarrow c} B(\omega) = \left[K_1(Rk_c(\omega))Rk_c(\omega) + \frac{1}{2} K_0(Rk_c(\omega))R^2k_c^2(\omega)\varepsilon^{-1}(\omega) \right]^{-1}.$$

The fields outside C_R are:

$$(27) \quad E_x^{II} = -\frac{iz_1 e}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(\varrho k(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] \omega d\omega = B_{op} E_x^{(F)},$$

$$(28) \quad E_e^{II} = \frac{z_1 e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \varepsilon^{-1}(\omega) k(\omega) K_1(\varrho k(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega = B_{op} E_e^{(F)},$$

$$(29) \quad H^{II} = H_\varphi^{II} = \frac{z_1 e}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) k(\omega) K_1(\varrho k(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega = B_{op} H^{(F)},$$

$$(30) \quad B_{op} = B \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

The fields (E^{II}, H^{II}) may be obtained from the Fermi fields by the application of the operator B_{op} .

The fields inside C_R are:

$$(31) \quad E^I = E^{(c)} + E', \quad H^I = H^{(c)} + H'.$$

$E^{(c)}$ and $H^{(c)}$ are the fields created by the ionizing particle in vacuum, they can be obtained from the Coulomb field by Lorentz transformation:

$$(32) \quad E_x^{(c)} = -\frac{iz_1 e}{\pi v^2} (1 - \beta^2) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\varrho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] \omega d\omega = \frac{z_1 e (1 - \beta^2) (x - vt)}{[\varrho^2 (1 - \beta^2) + (x - vt)^2]^{3/2}},$$

$$(33) \quad E_e^{(c)} = \frac{z_1 e}{\pi v^2} \sqrt{1 - \beta^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\varrho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] \omega d\omega = \frac{z_1 e (1 - \beta^2) \varrho}{[\varrho^2 (1 - \beta^2) + (x - vt)^2]^{3/2}},$$

$$(34) \quad H^{(c)} = H_\varphi^{(c)} = \beta E_e^{(c)}.$$

$(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$ are the corrections to the field of the particle moving in vacuum due to the polarization outside C_R :

$$(35) \quad \mathbf{E}'_x = \frac{z_1 e}{2v^2} (1 - \beta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) I_0(\varrho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] \omega \, d\omega,$$

$$(36) \quad \mathbf{E}'_e = \frac{iz_1 e}{2v^2} \sqrt{1 - \beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) I_1(\varrho k_0(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] \omega \, d\omega,$$

$$(37) \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_\varphi = \beta \mathbf{E}'_e.$$

The field \mathbf{E}' is finite at the position of the particle at any instant and allows us to get immediately the rate of loss per unit length of path due to distant interactions, since it is the difference between the total field and the Lorentz transformed Coulomb field:

$$(38) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = -\frac{z_1 e}{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}'(\text{part.})) = -\frac{z_1^2 e^2}{2v^2} (1 - \beta^2) \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) \omega \, d\omega.$$

By distant interactions we mean always those at distances larger than R , whereas usually the distant interactions are taken at distances larger than 10^{-8} cm.

3. - We shall now compute explicitly the value of the integral in (38) by taking $v = c$. It results from (23) that:

$$(39) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = \frac{2z_1^2 e^2}{\pi R^2} \mathcal{R} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) \frac{K_0(Rk(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} B(\omega) i\omega \, d\omega,$$

(\mathcal{R} = real part).

We shall consider only the limit for $v \rightarrow c$, because for low velocities the contribution of the interactions at distances larger than R to the loss are small. It results from the second equation (24) and (26) that:

$$(40) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW_{>R}}{dx} \right) = \frac{4z_1^2 e^2}{\pi R^2} \mathcal{R} \int_0^\infty \left[1 + 2 \frac{K_1(Rk_c(\omega))}{K_0(Rk_c(\omega))} (Rk_c(\omega))^{-1} \varepsilon(\omega) \right]^{-1} i \frac{d\omega}{\omega},$$

$$(41) \quad k_c(\omega) = \lim_{v \rightarrow c} k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \varepsilon(\omega)}, \quad \left(\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{} < \frac{\pi}{2} \right).$$

The dielectric constant is given by the Lorentz formula:

$$(42) \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\sum_j \frac{f_j}{v_j^2 - \nu^2 - ig_j \nu}}{1 - \frac{1}{3} \sum_j \frac{f_j}{v_j^2 - \nu^2 - ig_j \nu}}, \quad \left(\nu = \frac{\omega}{2\pi\alpha}, \alpha = \sqrt{\frac{ne^2}{\pi m}} \right).$$

The ν_j are the oscillator frequencies measured in units α and the f_j the corresponding oscillator percentuals. The damping constants g are positive and very small, when there are no conduction electrons, as we assume. It is shown in Appendix I that in the case of a complex $\varepsilon(\omega)$ the quantity within the square bracket in (40) has zeros in the neighbourhood of the frequencies ω , and lying in the lower part of the complex ω -plane, but has no zeros or singularities within the quadrant of the positive real and positive imaginary axes. We shall deform the integration path and replace it by the positive imaginary axis and a quarter of circle at infinity, between the positive imaginary and the positive real axes. We shall then neglect the damping constants. The quantity inside the square bracket in (40) is real on the imaginary axis, so that the only contribution comes from the quarter of circle at infinity. The asymptotic expressions of the dielectric constant ε and of $k_c(\omega)$ are:

$$(43) \quad \varepsilon(\omega) \sim 1 - \frac{4\pi^2\alpha^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon^{-1}(\omega) \sim 1 + \frac{4\pi^2\alpha^2}{\omega^2}, \quad k_c(\omega) \sim \frac{2\pi\alpha}{c}.$$

Finally we get:

$$(44) \quad \lim_{\nu \rightarrow c} \left(- \frac{dW_{>R}}{dx} \right) = \frac{2z_1^2 e^2}{R^2} \left[1 + 2 \frac{K_1(1)}{K_0(1)} \right]^{-1} \cong \frac{z_1^2 e^2}{2R^2} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m e^2}.$$

Modification of the formula of Frank and Tamm.

4. - We shall now examine more in detail the nature of the loss due to distant interactions, in order to separate the ionization-excitation from the loss due to emission of Cerenkov radiation. The energy transmitted to the medium at distances larger than ϱ , ϱ being larger than R , per unit length of path is:

$$(45) \quad - \frac{dW_e^{\text{II}}}{dx} = \frac{c}{4\pi v} \int_{\sigma_\varrho} [\mathbf{E}^{\text{II}} \times \mathbf{H}^{\text{II}}]_n dS = - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_\varrho} E_n^{\text{II}} \varepsilon_{\text{op}} E_e^{\text{II}} dS.$$

The integral is taken over the surface of the cylinder σ_ϱ and n denotes the

normal component. It is easily seen that:

$$\begin{aligned}
 (46) \quad \frac{dW_{\rho}^{11}}{dx} &= -\frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x^{11} \varepsilon_{op} E_{\rho}^{11} dx \\
 &= \frac{i z_1^2 \rho^2}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) B(-\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k(-\omega) K_1(\rho k(-\omega)) K_0(\rho k(\omega)) \omega d\omega = \\
 &= \frac{2 z_1^2 \rho^2}{\pi v^2} \mathcal{R} \int_0^{\infty} |B(\omega)|^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k^*(\omega) K_1(\rho k^*(\omega)) K_0(\rho k(\omega)) i \omega d\omega.
 \end{aligned}$$

The corresponding formula in the Fermi theory

$$(47) \quad -\frac{dW_{\rho}^{(F)}}{dx} = \frac{2 z_1^2 \rho^2}{\pi v^2} \mathcal{R} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k^*(\omega) K_1(\rho k^*(\omega)) K_0(\rho k(\omega)) i \omega d\omega,$$

can be obtained from (46) by taking $B = 1$.

It was shown in references (5) and (6) that in the case of a non absorbent medium (real $\varepsilon(\omega)$):

$$(48) \quad -\frac{dW_{\rho}^{(F)}}{dx} = -\frac{dW_{\infty}^{(F)}}{dx} + \frac{2 z_1^2 \rho^2}{v^2} \sum_{\bar{\omega} > 0} a_{\bar{\omega}} \bar{\omega} \frac{|\bar{\omega}| \rho}{v} K_1\left(\frac{|\bar{\omega}| \rho}{v}\right) K_0\left(\frac{|\bar{\omega}| \rho}{v}\right),$$

$$(49) \quad -\frac{dW_{\infty}^{(F)}}{dx} = -\frac{z_1^2 \rho^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 \varepsilon < 0} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) \omega d\omega, \quad (\omega > 0).$$

where $-dW_{\infty}^{(F)}/dx$ is the rate of emission of Cerenkov radiation per cm. Formula (49) is due to FRANK and TAMM (9). The $a_{\bar{\omega}}$ are the residues of $\varepsilon^{-1}(\omega)$ at the poles $\bar{\omega}$. These poles are all real and simple, in the case of a real $\varepsilon(\omega)$:

$$(50) \quad \frac{1}{\varepsilon(\omega)} = 1 + \sum_{\bar{\omega}} \frac{a_{\bar{\omega}}}{\omega - \bar{\omega}} = 1 + 2 \sum_{\bar{\omega} > 0} \frac{\bar{\omega} a_{\bar{\omega}}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2}.$$

The contribution of the residues in (48) gives the rate of loss per cm due to direct ionization and excitation. Equation (48) shows clearly that the resonances occur at the frequencies $\bar{\omega}$, as it was said in the discussion of section 1.

We may expect to get a formula analogous to (48) in the present theory. There are now some new circumstances due to the presence of the factor $|B(\omega)|^2$ in (46). The $\bar{\omega}$ are no more poles of the quantity under the integral

in (46), but there are poles introduced by the factor $|B(\omega)|^2$, as we shall now prove. It was shown in references (5) and (6) that there is a pole $\bar{\omega}_j$ of $\varepsilon(\omega)$ very close to each frequency ω_j ($\bar{\omega}_j < \omega_j$). We may write:

$$(51) \quad |B(\omega)|^2 k^*(\omega) K_1(\varrho k^*(\omega)) K_0(\varrho k(\omega)) = B(\omega) B(-\omega) k^*(\omega) K_1(\varrho k^*(\omega)) K_0(\varrho k(\omega)) \\ \frac{K_1(\varrho k^*(\omega)) K_0(\varrho k(\omega))}{K_1(Rk^*(\omega)) K_1(Rk(\omega))} [R^2 k(\omega) D(\omega) D(-\omega)]^{-1},$$

$$(52) \quad D(\omega) = I_0(Rk_0(\omega)) + \frac{K_0(Rk(\omega)) k(\omega)}{K_1(Rk(\omega)) k_0(\omega)} \varepsilon^{-1}(\omega) I_1(Rk_0(\omega)).$$

In the case of a real $\varepsilon(\omega)$, the function D is real and monotonic in the interval $\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_j$. Since

$$(53) \quad D(\bar{\omega}_j) = I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) > 0, \quad D(\bar{\omega}_j - 0) = -\infty,$$

there is a zero $\tilde{\omega}_j$ of D in that interval. $\tilde{\omega}_j$ is a double pole of the quantity under the integral in (46). When the damping of the electronic vibrations is not neglected, $\varepsilon(\omega)$ is complex and its zeros $\bar{\omega}'_j - i\bar{\eta}_j$ and poles $\bar{\omega}''_j - i\bar{\eta}_j$ have negative imaginary parts which tend to zero together with the damping constants g in the Lorentz formula (42). In the case of very small damping constants, the phase of $D(\omega)$ varies approximately by $-\pi$ as ω varies from $\bar{\omega}'_j$ to $\bar{\omega}''_j$. This shows that the zeros of $D(\omega)$ corresponding to the $\tilde{\omega}_j$ have also negative imaginary parts $-\tilde{\eta}_j$. The corresponding zeros of $D(-\omega)$ have positive imaginary parts. In the limit of zero damping constants, $D(\omega)$ has no zeros in the Cerenkov bands, because the ratio of the K functions in (52) cannot take imaginary values inside a Cerenkov band. (These points are discussed in Appendix I).

The transition to the case of zero damping, in (46), is more complicated than in the case of the theory on Fermi's lines, because the quantity under the integral has poles on both sides of the real ω -axis. In order to obtain a formula analogous to (48), we shall consider equations (27) and (28) as obtained from the inversion of a two sided Laplace transformation, instead of a Fourier transformation, and the integration paths will be taken parallel to the real ω -axis at a distance δ , in the upper part of the ω -plane. The well known formula for the Laplace transform of a product of two functions gives

$$(54) \quad -\frac{\varrho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x^{\text{II}} \varepsilon_{\text{op}} E_e^{\text{II}} \exp \left[-2i\delta \frac{x}{v} \right] dx = \\ = \frac{iz_1 e^2 \varrho}{\pi v^2} \int_{-\infty + i\delta}^{+\infty + i\delta} B(\omega) B(2i\delta - \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(\varrho k(\omega)) K_1(\varrho k(2i\delta - \omega)) k(2i\delta - \omega) \omega d\omega.$$

By taking a sufficiently small δ , we may keep it constant and make the damping constants tend to zero, and then let δ tend to zero. Thus we get:

$$(55) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{dW_{\theta}^{II}}{dx} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{iz_1 e^2 \rho}{\pi v^2} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty + i\delta}^{+\infty + i\delta} B(\omega) B(2i\delta - \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(\rho k(\omega)) K_1(\rho k(2i\delta - \omega)) k(2i\delta - \omega) \omega d\omega \right].$$

The important thing is that, in the limit, we do not get the Cauchy principal value definition of the integral of $B(\omega) B(-\omega) [(1/\varepsilon(\omega)) - \beta^2] K_0(\rho k(\omega)) \times K_1(\rho k(-\omega)) k(-\omega) \omega$ along the real ω -axis, but the integral taken along the real axis indented by infinitesimal semi-circles centred at the $\tilde{\omega}_j$, and lying in the upper part of the ω -plane. We shall denote this integration path by \tilde{C} and drop the \lim in the left hand side of (55):

$$(56) \quad -\frac{dW_{\theta}^{II}}{dx} = \frac{iz_1 e^2 \rho}{\pi v^2} \int_{\tilde{C}} B(\omega) B(-\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k(-\omega) K_1(\rho k(-\omega)) K_0(\rho k(\omega)) \omega d\omega.$$

It was shown in references (5) and (6) that:

$$(57) \quad \mathcal{R}[i\rho k(-\omega) K_1(\rho k(-\omega)) K_0(\rho k(\omega))] = \arg k(\omega) \quad (\omega > 0).$$

Therefore the only contributions to the right hand side of (56) are those of the Cerenkov frequencies and the residues at the $\tilde{\omega}_j$:

$$(58) \quad -\frac{dW_{\theta}^{II}}{dx} = -\frac{z_1^2 \rho^2}{v^2} \int_{\left(\frac{1-\beta^2 \varepsilon < 0}{\omega > 0} \right)} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) |B(\omega)|^2 \omega d\omega + \\ + \frac{2z_1^2 \rho^2}{v^2} \sum_j \tilde{a}_{\tilde{\omega}_j}(\rho) \tilde{\omega}_j \rho k(\tilde{\omega}_j) K_1(\rho k(\tilde{\omega}_j)) K_0(\rho k(\omega_j)),$$

$$(58a) \quad \tilde{a}_{\tilde{\omega}_j}(\rho) = \frac{\text{Residue} \left[B^2(\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k(\omega) K_1(\rho k(\omega)) K_0(\rho k(\omega)) \omega \right]}{\tilde{\omega}_j k(\tilde{\omega}_j) K_1(\rho k(\tilde{\omega}_j)) K_0(\rho k(\tilde{\omega}_j))}.$$

The flux of the Poynting vector through the cylinder at infinity gives the rate of emission of Cerenkov radiation:

$$(59) \quad -\frac{dW_{\infty}^{II}}{dx} = -\frac{z_1^2 \rho^2}{v^2} \int_{\left(\frac{1-\beta^2 \varepsilon < 0}{\omega > 0} \right)} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) |B(\omega)|^2 \omega d\omega = -\frac{dW_{\text{Cer}}^{II}}{dx}.$$

This formula differs from that of FRANK and TAMM (49) by the presence of the factor $|B(\omega)|^2$ which reduces considerably the intensity of the high energy radiation. We may write:

$$(60) \quad -\frac{dW_{\epsilon}^{\text{II}}}{dx} = \frac{dW_{\text{Cer}}^{\text{II}}}{dx} + \frac{2z_1^2 e^2}{v^2} \sum_j \tilde{\omega}_j(\rho) \tilde{\omega}_j \rho k(\tilde{\omega}_j) K_1(\rho k(\tilde{\omega}_j)) K_0(\rho k(\tilde{\omega}_j)).$$

The second term in the right hand side of (60) gives the rate of loss per cm due to direct ionization and excitation at distances larger than $\rho > R$.

5. - We can compute the rate of loss of energy due to distant interactions by using the Poynting vector of the field inside C_R :

$$(61) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = \frac{c}{4\pi v} \int_{C_\rho} [\mathbf{E}^1 \times \mathbf{H}^1]_n dS = -\frac{1}{4\pi} \int_{C_\rho} E_x^1 E_\rho^1 dS = \\ = -\frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [E_x^{(c)} E_\rho^{(c)} + E_x^{(c)} E_\rho' + E_x' E_\rho^{(c)} + E_x' E_\rho'] dx.$$

It is easily seen that the terms $E_x^{(c)} E_\rho^{(c)}$ and $E_x' E_\rho'$ do not give any contribution to (61). By working out the contributions of the other two terms, we find again the formula (38). We shall now separate the contributions of the direct ionization-excitation and the Cerenkov radiation in (39), by indenting the positive real axis at the $\tilde{\omega}$, corresponding to zero damping and making the damping constants tend to zero. Thus we get:

$$(62) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = \frac{2z_1^2 e^2}{\pi v^2} \mathcal{R} \int_{\text{Cer bands}} \frac{K_0(Rk(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) i\omega d\omega \\ - \frac{2z_1^2 e^2}{v^2} \sum_j \left[I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \frac{\tilde{\omega}_j R}{v\sqrt{1-\beta^2}} \right]^{-1} \tilde{\omega}_j \text{Residue}_{\tilde{\omega}_j} [D(\omega)]^{-1}.$$

It seems likely that the real part of the integral over the Cerenkov bands is the rate of emission of Cerenkov radiation per cm and the contributions of the residues the rate of loss due to direct ionization and excitation at distances larger than R . It is shown in Appendix II that the first term in the right hand side of (62) coincides with $-dW_{\infty}^{\text{II}}/dx$. Thus we get a more convenient form of the loss by ionization and excitation.

The residue in (62) can be computed by the well known formula:

$$(63) \quad \text{Residue}_{\tilde{\omega}_j} [D(\omega)]^{-1} = \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\omega=\tilde{\omega}_j}^{-1}.$$

In many cases of practical interest $\omega_j R/v \gg 1$ and we can determine with sufficient accuracy $\tilde{\omega}_j$ by the equation

$$(64) \quad [\varepsilon(\tilde{\omega}_j)]^{-1} \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} = -\sqrt{1 - \beta^2} \frac{I_0(Rk_0(\omega_j))}{I_1(Rk_0(\omega_j))},$$

and take

$$(65) \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\tilde{\omega}_j}^{-1} \cong \left[\left(1 + \frac{\beta^2 \varepsilon}{2(1 - \beta^2 \varepsilon)} \right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\omega} I_0(Rk_0(\omega)) \right]_{(\omega = \tilde{\omega}_j)}^{-1}.$$

For extremely relativistic particles and $\omega_j R/v \gg 1$ we get

$$(66) \quad \varepsilon(\tilde{\omega}_j) \cong \left(\frac{\omega_j R}{2v} \right)^2, \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\tilde{\omega}_j}^{-1} \cong -\frac{4\pi n e^2}{m} \frac{f_j}{\omega_j} \left(\frac{\omega_j R}{2v} \right)^{-2}.$$

by using the approximate expression

$$(67) \quad \varepsilon(\omega) \cong \frac{4\pi^2 \alpha^2 f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (\omega \cong \omega_j),$$

for values of ω very close to $\tilde{\omega}_j$. The contribution of the residue at ω_j to $-dW_{>R}/dx$ is approximately

$$(68) \quad \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} f_j \left(\frac{\omega_j R}{2v} \right)^{-4}, \quad \left(\frac{\omega_j R}{v} \gg 1, \frac{\omega_j R}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \ll 1 \right).$$

A general approximate expression of the contributions of the residues can be obtained from the formula (9) of Appendix III. It results from (68) that the contribution of the large ω_j is negligible, at distances larger than R . It is interesting to remark that their contribution is nevertheless larger than in the theory on Fermi's lines. Indeed, since

$$(69) \quad \bar{\omega}_j a_{\bar{\omega}_j} = -\bar{\omega}_j a_{-\bar{\omega}_j} \cong 2\pi^2 \alpha^2 f_j,$$

it follows from (48) that the contribution of a large frequency ω_j , in the theory on Fermi's lines, is:

$$(70) \quad \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \frac{\pi f_j}{2} \exp \left[-\frac{2\omega_j R}{v} \right], \quad \left(\frac{\omega_j R}{v} \gg 1 \right).$$

When $\omega_j R/v \ll 1$, we may use the approximate expressions (24), so that:

$$(71) \quad \varepsilon(\tilde{\omega}_j) \cong -\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_j R}{v} \right)^2 K_0 \left(\frac{\tilde{\omega}_j R}{v} \right), \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega = \tilde{\omega}_j)} \cong \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_{(\omega = \tilde{\omega}_j)}.$$

It follows from (62) and (63) that the contribution of ω_i to $-dW_{>R}/dx$ is approximately

$$(72) \quad \frac{2z_1^2 e^2}{v^2} \bar{\omega}_i K_0 \left(\frac{\bar{\omega}_i R}{v} \right) \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_{(\omega=\bar{\omega}_i)}^{-1}, \quad \left(\frac{\omega_i R}{v} \ll 1 \right),$$

and does differ little from the corresponding value in the theory on Fermi's lines:

$$(72a) \quad \frac{2z_1^2 e^2}{v^2} \bar{\omega}_i K_0 \left(\frac{\bar{\omega}_i R}{v} \right) \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_{(\omega=\bar{\omega}_i)}^{-1}, \quad (\tilde{\omega}_i \simeq \bar{\omega}_i).$$

Discussion of the energy loss due to distant interactions.

6. - We shall now compare the results of the present theory and that on Fermi's lines. We shall first assume that

$$(73) \quad \frac{\omega_j R}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \gg 1,$$

for all the frequencies and we shall replace the I and K functions by their asymptotic expressions

$$(74) \quad I(u) \simeq \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}}, \quad K(u) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2u}} \exp[-u] \quad (|u| \gg 1),$$

in equations (22) and (52). Thus we get $\varepsilon(\tilde{\omega}_j) \simeq -1$ for $\beta \ll 1$ and using formula (9) of Appendix III

$$(75) \quad \frac{2z_1^2 e^2}{v^2} [I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) Rk_0(\tilde{\omega}_j)]^{-1} \tilde{\omega}_j \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega=\tilde{\omega}_j)}^{-1} \simeq \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} f_j \frac{\omega_j R}{v} K_1^2 \left(\frac{\omega_j R}{v} \right).$$

Hence the results of the present theory do not differ practically from that on Fermi's lines for non relativistic velocities and distances larger than R .

The total loss at distances larger than R is given approximately by (44), for extremely relativistic particles. It is easily seen that the formulas given in references (5) and (6) lead to the following result

$$(76) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW_{\infty}^{(F)}}{dx} \right) = \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m c^2} \log \frac{\prod_j \tilde{\omega}_j f'_j}{2\pi\alpha} \simeq \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m c^2} \log \frac{I_z}{2\pi\alpha\hbar},$$

$$(77) \quad f'_j = \frac{a_{\tilde{\omega}_j} \tilde{\omega}_j}{2\pi^2 \alpha^2} \simeq f_j.$$

I_s being the mean ionization potential of the atoms of the medium (atomic number Z). The value (76) is, in most usual cases, considerably larger than (44), particularly for gases. The total amount of Cerenkov radiation is, therefore, much smaller in the present theory than in that on Fermi's lines, in most cases. We shall now prove that this is due to the strong reduction of the high energy Cerenkov bands, i.e. those in which $\omega R/v \gg 1$. $|Rk(\omega)|$ is equal to zero at the lower limits of those bands, but has large values on a large part of the bands and becomes infinite at the upper limits. The term with the K_0 function in (22) is equal to zero at both the limits of a band and is not very important, so that:

$$(78) \quad B(\omega) \cong [I_0(Rk_0(\omega))K_1(Rk(\omega))Rk(\omega)]^{-1}.$$

In the part of a band that gives the strong intensity in the theory of Frank and Tamm, we may use the asymptotic expression (74) of K_1 , and since $k(\omega)$ is imaginary:

$$(79) \quad |B(\omega)|^2 \cong \frac{2}{\pi} [I_0(Rk_0(\omega))\sqrt{R|k(\omega)|}]^{-2} \rightarrow \frac{2}{\pi} \left[\frac{|\omega|R}{c} (\varepsilon(\omega) - 1) \right]_{(\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c)}^{-1}.$$

The factor $|B(\omega)|^2$ in formula (59) cuts down strongly the intensity when $|\omega|R/v \gg 1$.

It is interesting to remark that the factor $|B(\omega)|^2$ in (59) does not change appreciably the intensity of the low energy Cerenkov radiation. When $|\omega|R/v \ll 1$ we get from (22):

$$(80) \quad B(\omega) \cong 1, \quad \left(\frac{|\omega|R}{v} \ll 1, \quad |\omega| \neq \bar{\omega} \right).$$

The preceding discussion shows that the essential difference between the present theory and that on Fermi's lines comes from the drastic reduction of the high energy Cerenkov radiation. Whenever the theory on Fermi's lines does not lead to a large contribution of the Cerenkov radiation to the total loss, the results of both theories are not very different. It results from (76) that this may only happen when

$$(81) \quad \log \frac{RI_s}{\hbar c} \cong \frac{1}{2},$$

i.e. for condensed media of low atomic number. It will be shown later that the loss at distances less than R is usually less than in the theory on Fermi's lines.

The loss of energy in close collisions.

7. — Quantum corrections become important in the computation of the average loss at distances less than R , as it was shown in the Introduction. It results from those considerations that the uncertainty principle leads to a broadening of the frequency ranges in which resonance occurs and the emission of coherent radiation is not possible in these ranges. Since the main polarization effect at such distances consists in cutting down the direct ionization-excitation and replacing it by the emission of coherent radiation, it is satisfactory to neglect altogether the polarization effects for $\varrho \ll R$ and to apply the methods of Bethe-Bloch-Möller-Williams. At distances close to R the polarization effects become considerable, as it was shown by A. BOHR (*).

In reference (15), one of us applied the Bethe-Bloch-Möller-Williams methods up to distances R' , R' being close to our R , and the modified form of the Fermi theory to distances larger than R' . Such a treatment is satisfactory, when a high accuracy is not required, and it has the advantage of simplicity. It can be improved by computing the energy transfers at distances less than R with the field $(\mathbf{E}', \mathbf{H}')$, instead of the fields $(\mathbf{E}^{(c)}, \mathbf{H}^{(c)})$ used in the quantum theory of Bethe-Bloch-Möller Williams.

BLOCH (16) and WILLIAMS (17) have shown, by neglecting polarization effects, that, for distances less than $R_1 \cong 10^{-8}$ cm, it is necessary to use quantum mechanics. But this is no more necessary for distances larger than R_1 , if only the average loss is required, provided the atom is assimilated to a system of classical harmonic oscillators with frequencies ω_j corresponding to the quantum jumps, there being Zf_j oscillators of circular frequency ω_j . We shall separate the contributions of distances less than R_1 and distances between R_1 and R :

$$(82) \quad -\frac{dW_{<R}}{dx} = -\frac{dW_{<R_1}}{dx} - \frac{dW_{R_1}^1}{dx},$$

$-dW_{R_1}^1/dx$ being the contribution of the atoms between the cylinders C_{R_1} and C_R . We shall derive $-dW_{<R_1}/dx$ from the Bethe-Bloch quantum treatment and compute $-dW_{R_1}^1/dx$ classically as the rate of work per cm done by the field \mathbf{E}' on the electrons between C_{R_1} and C_R . If we neglect completely the polarization field \mathbf{E}' , $-dW_{R_1}^1/dx$ is replaced by the rate of work done by the field $\mathbf{E}^{(c)}$. It is shown in references (5) and (6) that this rate of work $-dW_{R_1}/dx$ is:

$$(83) \quad -\frac{dW_{R_1}}{dx} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j k_0^2(\omega_j) [U(\omega_j, R_1) - U(\omega_j, R)],$$

$$(84) \quad U(\omega, \varrho) = \varrho^2 \left[\beta^2 K_0^2(\varrho k_0(\omega)) - \beta^2 K_1^2(\varrho k_0(\omega)) + \frac{2}{\varrho k_0(\omega)} K_0(\varrho k_0(\omega)) K_1(\varrho k_0(\omega)) \right].$$

For $(z_1 e^2 / \hbar v) \ll 1$ the total loss is given by the Bethe formula

$$(85) \quad \left(-\frac{dW}{dx} \right)_{\text{Bet.}} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \left[\log \frac{2m v^2 E_{\text{max}}}{I_z^2 (1 - \beta^2)} - 2\beta^2 \right], \quad \left(\frac{z_1 e^2}{\hbar v} \ll 1 \right),$$

when polarization effects are neglected, E_{max} being the maximum energy transferable to an electron by the ionizing particle. In order to obtain $-dW_{<R_1}/dx$, we must subtract from (85) the contribution of the impact parameters larger than R_1 :

$$(86) \quad -\frac{dW_{<R_1}}{dx} = \left(-\frac{dW}{dx} \right)_{\text{Bet.}} - \left(-\frac{dW_{R_1}}{dx} \right)_{(R=\infty)}, \quad \left(\frac{z_1 e^2}{\hbar v} \ll 1 \right),$$

$$(87) \quad -\frac{dW_{<R_1}}{dx} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \left[\log \frac{2m v^2 E_{\text{max}}}{I_z^2 (1 - \beta^2)} - 2\beta^2 - \sum_j f_j h_0^2(\omega_j) U(\omega_j, R_1) \right], \quad \left(\frac{z_1 e^2}{\hbar v} \ll 1 \right).$$

A more general expression can be obtained by replacing the Bethe formula by that of Bloch, which is valid for any value of $z_1 e^2 / \hbar v$

$$(88) \quad -\frac{dW_{<R_1}}{dx} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \left[\log \frac{2m v^2 E_{\text{max}}}{I_z^2 (1 - \beta^2)} - 2\beta^2 + 2\psi(1) - 2\mathcal{R} \left\{ \psi \left(1 + \frac{iz_1 e^2}{\hbar v} \right) \right\} - \sum_j f_j h_0^2(\omega_j) U(\omega_j, R_1) \right],$$

ψ denoting the logarithmic derivative of the gamma function: $\psi(u) = d/du \log \Gamma(u)$. It is important to remark that (87) and (88) do depend on the f_j and ω_j individually and not only through the mean ionization potential I_z . This is a very unpleasant circumstance, because these quantities are in general unknown. However, if we limit the energy transfers to a value E' and consider the limit of very high energies, we get (*):

$$(89) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW_{<R_1}^{(E')}}{dx} \right) = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m c^2} \left[\log \frac{m \gamma^2 R_1^2 E'}{2 \hbar^2} - 1 + 2\psi(1) - 2\mathcal{R} \left\{ \psi \left(1 + \frac{iz_1 e^2}{\hbar c} \right) \right\} \right].$$

This limit value does not depend any more on the f_j and ω_j .

(*) This formula is valid when $E' > \sqrt{m c^2 \hbar \omega_j}$. For small values of E' , $E' < \sqrt{m c^2 \hbar \omega_j}$, the term -1 inside the bracket in the right hand side is replaced by 0.

A rough approximate value of $-dW_{<R}/dx$ can be obtained by adding to (88) the value (83), with R replaced by $R' \approx 0.37R$, in order to take into account the reduction of the loss by the polarization effects at distances close to R :

$$(90) \quad -\frac{dW_{<R}}{dx} \approx \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{mv^2} \left[\frac{2mv^2 E_{\max}}{I_x^2 (1-\beta^2)} - 2\beta^2 + 2\psi(1) - 2\mathcal{R} \left\{ \psi \left(1 + \frac{iz}{hv} e^{\psi} \right) \right\} - \sum_j f_j k_0^2(\omega_j) U(\omega_j, R') \right].$$

In the next section we shall derive a more accurate expression and justify the choice of R' .

8. — In order to determine the density of polarization \mathbf{P}^1 induced by \mathbf{E}^1 , we shall write

$$(91) \quad \mathbf{E}^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\epsilon}^1(\omega) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega,$$

hence

$$(92) \quad \mathbf{P}^1 = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{\text{op}} - 1) \mathbf{E}^1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon(\omega) - 1) \boldsymbol{\epsilon}^1(\omega) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega.$$

$dW_{R_1}^1/dx$ is equal to the rate of work per cm done by \mathbf{E}^1 on the electrons between C_{R_1} and C_R :

$$(93) \quad -\frac{dW_{R_1}^1}{dx} = \frac{1}{v} \int_{R_1}^R \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{E}^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^1}{\partial t} \right) dx = \\ = 2\pi \int_{R_1}^R \varrho \, d\varrho \, \mathcal{R} \int_0^{+\infty} (1 - \varepsilon(\omega)) (\boldsymbol{\epsilon}^1(\omega) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^1(-\omega)) i\omega \, d\omega.$$

It results from (32)-(33) and (35)-(36) that:

$$(94) \quad -\frac{dW_{R_1}^1}{dx} = -\frac{dW_{R_1}}{dx} + 2\pi \int_{R_1}^R \mathcal{Q}(\varrho) \varrho \, d\varrho,$$

$$(95) \quad \Omega(\varrho) = \frac{z_1^2 e^2}{2\pi v^4} (1 - \beta^2)$$

$$\mathcal{R} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \int_0^\infty i\varepsilon(\omega) C(\omega) C(-\omega) \{ (1 - \beta^2) I_0^2(\varrho k_0(\omega)) + I_1^2(\varrho k_0(\omega)) \} \omega^3 d\omega + \int_0^\infty \varepsilon(\omega) (C(\omega) + C(-\omega)) \{ (1 - \beta^2) K_0(\varrho k_0(\omega)) I_0(\varrho k_0(\omega)) - K_1(\varrho k_0(\omega)) I_1(\varrho k_0(\omega)) \} \omega^3 d\omega \right].$$

We get from (23) and (52):

$$(96) \quad \frac{\omega^2}{v^2} \varepsilon(\omega) [C(\omega) + C(-\omega)] = \frac{4i\omega^2}{\pi v^2} \varepsilon(\omega) \frac{K_0(Rk_0(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} + \left[\frac{k(\omega)}{D(\omega)} \frac{K_0(Rk(\omega))}{K_1(Rk(\omega))} + \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(-\omega)} \frac{k(-\omega)}{D(-\omega)} \frac{K_0(Rk(-\omega))}{K_1(Rk(-\omega))} \right] \left\{ \frac{i\pi}{2} (1 - \beta^2) R I_0(Rk_0(\omega)) \right\}^{-1}.$$

$$(97) \quad \frac{\omega^2}{v^2} \varepsilon(\omega) C(\omega) C(-\omega) = -\frac{4\omega^2}{\pi^2 v^2} \varepsilon(\omega) \frac{K_0^2(Rk_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} + \left[\frac{k(\omega)}{D(\omega)} \frac{K_0(Rk(\omega))}{K_1(Rk(\omega))} + \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(-\omega)} \frac{k(-\omega)}{D(-\omega)} \frac{K_0(Rk(-\omega))}{K_1(Rk(-\omega))} \right] \frac{K_0(Rk_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} \left\{ \frac{\pi^2}{4} (1 - \beta^2) R \right\}^{-1} + \frac{1}{\varepsilon(-\omega)} \frac{k(\omega)k(-\omega)}{D(\omega)D(-\omega)} \frac{K_0(Rk(\omega))K_0(Rk(-\omega))}{K_1(Rk(\omega))K_1(Rk(-\omega))} \left\{ \frac{\pi^2 \omega^2}{4 v^8} (1 - \beta^2)^2 R^2 I_0^2(Rk_0(\omega)) \right\}^{-1}.$$

We must start with a complex $\varepsilon(\omega)$ and then make the damping constants g tend to 0. In the limit of zero damping constants, the only contributions to $\Omega(\varrho)$ come from the poles of the quantities under the integrals in (95), since these quantities are imaginary in the limit. The first term in the right hand side of (96) and the first term in the right hand side of (97) have the same poles as $\varepsilon(\omega)$. In the corresponding integrals the integration paths will be indented with infinitesimal semi circles centred at the poles of $\varepsilon(\omega)$ and lying in the upper part of the ω -plane, because these poles have negative imaginary parts when there is damping. The second group of terms in (96) and the second group of terms in (97) have simple poles due either to $D(\omega)$ or $D(-\omega)$. In the corresponding integrals, the integration paths must be indented with infinitesimal semi-circles centred at the $\tilde{\omega}_j$ and lying above the real ω -axis in the case of $D(\omega)$, and below that axis in the case of $D(-\omega)$. The last term in the right hand side of (97) has double poles at the $\tilde{\omega}_j$, in the limit of zero damping. The corresponding integral can be computed by the same method applied to (46).

We shall denote by $\Omega_1(\varrho)$ the part of $\Omega(\varrho)$ due to the poles of $\varepsilon(\omega)$ and by $\Omega_2(\varrho)$ the part of $\Omega(\varrho)$ due to the poles at the ω_j . It is easily seen that:

$$(98) \quad \Omega_1(\varrho) = \frac{2z_1^2 e^2}{\pi v^4} (1 - \beta^2) \sum_j b_j \bar{\omega}_j^3 \left[(1 - \beta^2) K_0(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) I_0(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) - \right. \\ \left. - K_1(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) I_1(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) - \frac{1}{2} \frac{K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))}{I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))} \{ (1 - \beta^2) I_0^2(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) + I_1^2(\varrho k_0(\bar{\omega}_j)) \} \right],$$

$$(99) \quad b_j = \frac{K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))}{I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))} \text{Residue}_{\bar{\omega}_j} \varepsilon(\omega) \cong -2\pi^2 \alpha^2 \frac{f_j}{\omega_j} \frac{K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))}{I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))}.$$

The contribution of the poles $\bar{\omega}_j$ is small at relativistic energies, since:

$$(100) \quad \lim_{v \rightarrow c} \Omega_1(\varrho) = 0.$$

The contributions of each pair of terms within the square brackets in (96) and (97) cancel, so that the only contribution to $\Omega_2(\varrho)$ comes from the last term in (97):

$$(101) \quad \Omega_2(\varrho) = -\frac{z_1^2 e^2}{\pi v^2 R^2} \times \\ \times \sum_j \text{Res}_{\bar{\omega}_j} \left[\frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2) \varepsilon(\omega)} \frac{K_0^2(Rk(\omega))}{K_1^2(Rk(\omega))} \left\{ (1 - \beta^2) \frac{I_0^2(\varrho k_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} - \frac{I_1^2(\varrho k_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} \right\} \omega D^{-2}(\omega) \right].$$

By using the well known Lommel formulas

$$(102) \quad \int K_l(\lambda u) I_l(\lambda u) u \, du = \frac{u^2}{2} [K_l(\lambda u) I_l(\lambda u) + K_{l+1}(\lambda u) I_{l-1}(\lambda u)],$$

$$(103) \quad \int I_l^2(\lambda u) u \, du = \frac{u^2}{2} [I_l^2(\lambda u) - I_{l-1}(\lambda u) I_{l+1}(\lambda u)],$$

we get:

$$(104) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_1(\varrho) \varrho \, d\varrho \cong 2\pi \int_0^R \Omega_1(\varrho) \varrho \, d\varrho = \\ = -\frac{z_1^2 e^2 R^2}{v^2 \varrho^2} (1 - \beta^2) \sum_j b_j \bar{\omega}_j^3 [K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) - K_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) - \\ - 2(\beta^2 Rk_0(\bar{\omega}_j))^{-1} K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) + I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) \{ Rk_0(\bar{\omega}_j) I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) \}^{-1}].$$

The integration of $\varrho\Omega_2(\varrho)$ can also be done by using (102) and (103):

$$\begin{aligned}
 (105) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho &\cong 2\pi \int_0^K \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho \\
 &= -\frac{z_1^2 e^2}{c^2} \sum_j \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} \left[\frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2) \varepsilon(\omega)} \frac{K_0^2(Rk(\omega))}{K_1^2(Rk(\omega))} \left\{ \frac{I_1^2(Rk_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(\beta^2 Rk_0(\omega))^{-1} \frac{I_1(Rk_0(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} - 1 \right\} \omega(D(\omega))^{-2} \right] \cong \\
 &\cong -\frac{z_1^2 e^2 R^2}{c^2} \sum_j \frac{K_0(Rk(\tilde{\omega}_j))}{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))} \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} \left[\frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}{(1 - \beta^2) \varepsilon(\omega)} B^2(\omega) K_0(Rk(\omega)) K_1(Rk(\omega)) \times \right. \\
 &\quad \left. \times k^2(\omega) \omega \left\{ \frac{I_1^2(Rk_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} + 2(\beta^2 Rk_0(\omega))^{-1} \frac{I_1(Rk_0(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} - 1 \right\} \right].
 \end{aligned}$$

It results from the equation (18) of the Appendix II that:

$$\begin{aligned}
 (106) \quad \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right] B^2(\omega) K_0(Rk(\omega)) K_1(Rk(\omega)) k(\omega) \omega \times \\
 \times \left[\frac{I_1^2(Rk_0(\omega))}{I_0^2(Rk_0(\omega))} + 2(\beta^2 Rk_0(\omega))^{-1} \frac{I_1(Rk_0(\omega))}{I_0(Rk_0(\omega))} - 1 \right] = \\
 = \left[\frac{I_1^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))}{I_0^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} + 2(\beta^2 Rk_0(\tilde{\omega}_j))^{-1} \frac{I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))}{I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} - 1 \right] \times \\
 \times \frac{K_0(Rk(\tilde{\omega}_j))}{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))} \frac{k(\tilde{\omega}_j)}{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \left(\frac{\tilde{\omega}_j R}{r} \right)^2 \omega_j \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega=\tilde{\omega}_j)}^{-1}.
 \end{aligned}$$

The residue of the product of a function $F_0(u)$, regular at u , by a function $F_2(u)$ having a second order pole at u is given by the formula:

$$(107) \quad \operatorname{Residue}_u [F_2(u) F_0(u)] = F_0(\tilde{u}) \operatorname{Residue}_{\tilde{u}} F_2(u) + 4 \left[\frac{dF_0}{du} F_2^3 \left(\frac{dF_2}{du} \right)^2 \right]_{(u=\tilde{u})}.$$

It follows from (105), (106) and (107) that:

$$\begin{aligned}
 (108) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho &\cong \frac{z_1^2 e^2}{v^2} \sum_j \frac{K_0(Rk(\omega_j))}{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))} \frac{k(\tilde{\omega}_j)}{k_0(\tilde{\omega}_j)} \frac{\tilde{\omega}_j \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega=\tilde{\omega}_j)}^{-1}}{I_0^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} \\
 &\times [\beta^2 \{ I_1^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) - I_0^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \} + 2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))^{-1} I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))] \times \\
 &\times \left[1 + I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \left\{ \left(\frac{d}{d\omega} \log k(\omega) \right) \left(\frac{dD}{d\omega} \right)^{-1} \right\}_{(\omega=\tilde{\omega}_j)} \right].
 \end{aligned}$$

The expression (66) of $(dD/d\omega)_{(\omega=\tilde{\omega}_j)}$ is not sufficient, because it is only applicable when $|\varepsilon(\tilde{\omega}_j)| \gg 1$. A more general formula will be derived in Appendix III:

$$(109) \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega=\tilde{\omega}_j)}^{-1} \cong \frac{4\pi n e^2 f_j}{m \tilde{\omega}_j I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{(1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j))^2}.$$

The approximate expression of $\varepsilon(\omega)$ given in Appendix III shows that:

$$(110) \quad \left[\frac{d}{d\omega} \log k(\omega) \right]_{(\omega=\tilde{\omega}_j)} \cong - \frac{\beta^2 m \tilde{\omega}_j}{4\pi n e^2 f_j} \frac{(1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j))^2}{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}.$$

Finally we get:

$$(111) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho \cong - \frac{8\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left(\frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \right)^2 \left(\frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \right)^2 \times \\ \times [\beta^2 \{ I_1^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) - I_0^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \} + 2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))^{-1} I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))] \times \\ \times [I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))]^{-2}.$$

This correction remains finite as v tends to c :

$$(112) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left[2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho \right] \cong - \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m c^2} \sum_j f_j \left[\left(1 + 2 \left(\frac{\tilde{\omega}_j R}{2c} \right)^{-2} \right) \left(\frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \right)^2 \right]_{(v=c)}.$$

For non relativistic energies the $Rk_0(\omega)$ have high values and the corrections due to Ω_1 and Ω_2 are negligible, because of the asymptotic behaviour of the I functions:

$$(113) \quad I_\nu(u) \sim \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left[1 + \frac{1 - 4\nu^2}{8u} + \dots \right].$$

We get from (111) and (113):

$$(114a) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho \cong \\ \cong - \frac{16\pi^2 n z_1^2 e^4}{m v^2} (2 - \beta^2) \sum_j \left[\frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)(1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j))}{(1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j))(2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j))} \right]^2 Rk_0(\tilde{\omega}_j) \exp[-2Rk_0(\tilde{\omega}_j)], \\ (\sqrt{1 - \beta^2} \cong 1).$$

It results from (104) that:

$$(114b) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_1(\varrho) \varrho \, d\varrho \simeq \frac{4\pi^2 n z_1^2 e^4}{m v^2} (1 - \beta^2) \sum_j f_j \left(\frac{\omega_j R}{c} \right)^2 \frac{\exp[-2Rk_0(\omega_j)]}{Rk_0(\omega_j)},$$

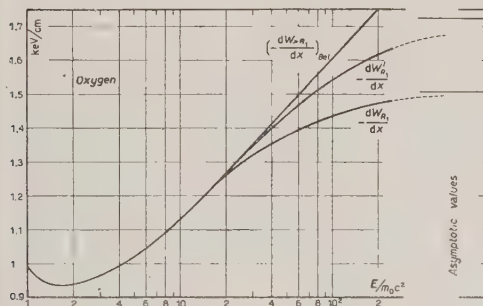


Fig. 1. — Rate of ionization at distances larger than $R_1 = 10^{-8}$ cm.

with $(\sqrt{1 - \beta^2} \simeq 1)$.

For extremely relativistic energies the correction (111) is roughly equal to $-4\pi n z_1^2 e^4 / mc^2$, as a consequence of (112). Therefore we may take in (90):

$$(115) \quad \begin{cases} \log \frac{R}{R'} \approx 1, \\ R' \approx 0.37R. \end{cases}$$

The saturation value of the total loss per cm, with transfers limited to E' , is roughly:

$$(116) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW^{(E')}}{dx} \right) \approx \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{mc^2} \left[\log \frac{m \gamma^2 R^2 E'}{2 \hbar^2} - 2 + 2\psi(1) - 2\mathcal{R} \left\{ \psi \left(1 + \frac{iz_1 c^2}{\hbar c} \right) \right\} \right].$$

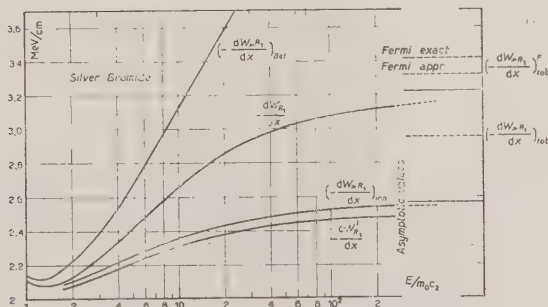


Fig. 2. — Rate of ionization at distances larger than $R_1 = 10^{-8}$ cm.

This value is smaller than that given by the theory on Fermi's lines:

$$(117) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW^{(E')}(F)}{dx} \right) \simeq \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{mc^2} \left[\log \frac{4m R^2 E'}{2 \hbar^2} - 1 + 2\psi(1) - 2\mathcal{R} \left\{ \psi \left(1 + \frac{iz_1 e^2}{\hbar c} \right) \right\} \right].$$

The variation of the Bethe loss at distances larger than R_1 ($-dW_{>R_1}/dx$)_{Bet.}, of $-dW_{R_1}/dx$ and of $-dW_{R_1}^1/dx$ with the energy of the ionizing particle are

represented in fig. 1 for oxygen (normal conditions) and in fig. 2 for AgBr crystals. In fig. 2 the variation of the rate of ionisation and excitation at distances larger than R is also included (*).

Discussion of the energy loss due to close collisions.

9. — In the computation of the energy loss at distances less than R , we took into account the interactions of the electrons of this region with the ionizing particle and with the electrons outside C_R , but we neglected the interactions between electrons lying inside C_R . The contribution of the electrons at distances less than R to the field outside C_R has also been neglected in the computation of the loss at distances larger than R . If we would have taken into account the contributions of the electrons inside C_R to the field, both within and outside C_R , by applying classical mechanics and electrodynamics, we would have, of course, been led to the theory on Fermi's lines. In our treatment, the loss at distances between R_1 and R consists of ionization and excitation, whereas in the theory on Fermi's lines the main effect of the electrons between R_1 and R at high relativistic energies is, in most cases, to give rise to the high energy Cerenkov radiation, as we shall now prove. It was shown in references (5) and (6) that the rate of work done by the field on the electrons at distances between ϱ and $\varrho + d\varrho$, in the theory on Fermi's lines, is

$$(118) \quad - \frac{dw_F(\varrho)}{dx} d\varrho = \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \varrho d\varrho \sum_j f'_j \bar{\omega}_j^2 \left[K_1^2 \left(\frac{\bar{\omega}_j \varrho}{v} \right) + K_0^2 \left(\frac{\bar{\omega}_j \varrho}{v} \right) \right].$$

with

$$(119) \quad 2\pi^2 \alpha^2 f'_j = a_{\bar{\omega}_j} \bar{\omega}_j, \quad (f'_j \cong f_j)$$

the notations being the same as in formula (48). The corresponding quantity in the Bethe-Bloch-Möller-Williams theory is

$$(120) \quad - \frac{dw_B(\varrho)}{dx} d\varrho = \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \varrho d\varrho \sum_j f_j k_0^2(\omega_j) [K_1^2(\varrho k_0(\omega_j)) + (1 - \beta^2) K_0^2(\varrho k_0(\omega_j))],$$

and in ours

$$(121) \quad - \frac{dw(\varrho)}{dx} d\varrho = - \frac{dw_B(\varrho)}{dx} d\varrho + 2\pi \Omega(\varrho) \varrho d\varrho.$$

(*) In fig. 2 the value obtained with the approximate formula of Halpern and Hall is indicated as Fermi approximate.

The total loss by ionization and excitation in the interval of distances $R_1 - R$, in the theory on Fermi's lines, is:

$$(122) \quad \int_{R_1}^R \frac{dw_F(\varrho)}{dx} d\varrho = \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{mv^2} \sum_j f_j' \left[\frac{\bar{\omega}_j R_1}{v} K_1 \left(\frac{\bar{\omega}_j R_1}{v} \right) K_0 \left(\frac{\bar{\omega}_j R_1}{v} \right) - \frac{\bar{\omega}_j R}{v} K_1 \left(\frac{\bar{\omega}_j R}{v} \right) K_0 \left(\frac{\bar{\omega}_j R}{v} \right) \right] \cong \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{mv^2} \log \frac{2\hbar v}{\gamma R_1 I_s}.$$

At extremely relativistic energies the rate of emission of Cerenkov radiation per cm is given by (76) and is larger than the value (122) for most elements in a condensed state and even more in the gaseous state. The Cerenkov radiation is due to the interaction of the ionizing particle with electrons at distances larger than atomic dimensions and the high energy bands, which account for the largest contribution in that theory, arise largely from interactions with electrons at distances less than R . (This is shown by the fact that, in our treatment, in which the electrons at distances less than R are not taken into account in this connection, the high energy bands are practically suppressed). Therefore, we may conclude that the main effect of the electrons in the interval of distance $R_1 - R$, at high relativistic energies, in the theory on Fermi's lines, is to give rise to the high energy Cerenkov radiation, in most cases.

In our treatment the quantity corresponding to (122) is $-dW_{R_1}^1/dx$. It results from (83) and (115) that:

$$(123) \quad \lim_{v \rightarrow c} \left(-\frac{dW_{R_1}^1}{dx} \right) \approx \frac{4\pi n z_1^2 e^4}{mc^2} \left(\log \frac{R}{R_1} - 1 \right).$$

This value is larger than that given by (122) in all cases, excepting condensed media of very low atomic number.

We have already considered in the Introduction reasons for not taking into account the field of the electrons in the interval of distances $R - R_1$, in the computation of the loss. We shall now examine this point in more detail. The influence of the field created by the electrons in the loss of energy is not of the same nature as that of the Coulomb force of the nuclei. It is an effect of the field due to the acceleration of the electrons and the coherence of the contributions of the different electrons plays an essential part. In order to see whether the interference of the fields of the electrons belonging to different atoms may be of importance, we must consider the times of collision. We (shall denote by $T_c(\varrho)$

$$(124) \quad T_c(\varrho) = \frac{2\varrho}{v} \sqrt{1 - \beta^2}$$

the time of collision defined, as usually, with the Lorentz transformed Coulomb field of the ionizing particle. The important contributions to the coherent fields of the electrons are due to particles whose phase differences correspond to time lags τ of the order of $T_c(q)$. It results from the uncertainty principle that

$$(125) \quad \Delta\tau\Delta\omega \geq 1,$$

and, since we need τ of the order of $T_c(q)$, we must have

$$(126) \quad \Delta\tau \ll T_c(q),$$

hence:

$$(127) \quad \Delta\omega \gg \frac{v}{2\rho\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Important coherence effects can only occur in frequency intervals of the order of $\bar{\omega}_j - \omega_j$. It was shown in references (5) and (6) that:

$$(128) \quad \bar{\omega}_j - \omega_j \approx \frac{4\pi^2\alpha^2 f_j}{3\omega_j} = \frac{\hbar c^2}{3R^2} \frac{f_j}{\hbar\omega_j}.$$

In order to have important coherence effects the uncertainty $\Delta\omega$ must satisfy the condition

$$(129) \quad \Delta\omega \ll \frac{\hbar c^2}{R^2 I_z},$$

which requires that:

$$(130) \quad \frac{\rho}{R} \gg \frac{RI_z}{\hbar c} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{Z}{137} \frac{R}{R_1} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad \left(I_z \approx \frac{Ze^2}{R_1} \right)$$

Since the minimum of ionization corresponds to $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1/3$, the condition (130) cannot be satisfied, after the minimum, at distances less than R . The condition (126) is certainly too stringent, since the polarization effects lead to an increase of the times of collision. The preceding considerations should therefore not be valid when the polarization effects are important, i.e. at distances larger than R . Moreover the small frequencies become very important. In most of the interval $R_1 - R$ the considerations leading to (130) are valid and show that the contribution of the electrons of that interval to the field may be neglected. The applicability of the classical treatment of sections 2, 3 and 4 to the atoms at distances larger than R depends essentially on the modification of the times of collision due to the strong polarization effects. We shall examine this point in the following section.

10. — The value (124) of the time of collision $T_c(\varrho)$ follows immediately from the formula:

$$(131) \quad E_e^{(e)} = \frac{z_1 e (1 - \beta^2) \varrho}{[\varrho^2 (1 - \beta^2) + (x - vt)^2]^{3/2}}.$$

We cannot apply the same method to the case of a dispersive medium, because we do not have any more a formula corresponding to (131). There is, however, another method of estimation of $T_c(\varrho)$ based on the Fourier integral (33). It is well known that the duration of an electromagnetic pulse, whose spectrum covers an interval $\Delta\omega$, is of the order of $2\pi/\Delta\omega$. Equation (33) shows that the width $\Delta\omega$ at the distance ϱ is determined by the condition

$$(132) \quad \varrho k_0(\Delta\omega) \approx 1, \quad \Delta\omega \approx \frac{v}{\varrho \sqrt{1 - \beta^2}},$$

which leads to (124). In the case of the Fermi field, the function $K_1(\varrho k_0(\omega))$ is replaced by $K_1(\varrho k(\omega))$:

$$(133) \quad E_e^{(F)} = \frac{z_1 e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1}(\omega) k(\omega) K_1(\varrho k(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v} - t \right) \right] d\omega.$$

When ω is much larger than the oscillator frequencies ω_j , we have:

$$(134) \quad \varepsilon(\omega) \cong 1 - \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\omega^2} = 1 - \frac{e^2}{\omega^2 R^2}, \quad (\omega \gg \omega_j).$$

Hence

$$(135) \quad \varrho k(\omega) \cong \sqrt{\frac{\varrho^2}{R^2} + \varrho^2 k_0^2(\omega)}, \quad (\omega \gg \omega_j),$$

and at distances larger than R the contributions of the large frequencies to $E_e^{(F)}$ become small, since

$$(136) \quad \varrho k(\omega) > 1 \quad (\omega \gg \omega_j, \varrho > R).$$

The preceding considerations show that the distance R behaves as a radius of action in the theory on Fermi's lines, as it was shown in an elementary way by A. BOHR⁽⁴⁾.

It results from (33) that:

$$(137) \quad \lim_{\varphi \rightarrow c} E_e^{(e)} = \frac{z_1 e}{\pi c \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \right] d\omega = \frac{2z_1 e}{\varrho} \delta(x - ct).$$

This formula shows clearly that the collision time T_c vanishes in the limit of $v = c$; the frequency range that gives important contributions to the field is now infinite. In the case of the Fermi field

$$(138) \quad \lim_{v \rightarrow c} K_q^{(F)} = \frac{z_1''}{\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1}(\omega) k_c(\omega) K_1(\rho k_c(\omega)) \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \right] d\omega,$$

and the transverse component of the electric field is not delta-like in the limit of $v = c$. This could also be seen by taking into account that the range of frequencies giving important contributions to the field does not tend to ∞ , as a consequence of (136).

In the case of E^{II} , (133) is replaced by (28). It results from (22) that:

$$(139) \quad B(\omega) \cong 1, \quad (\omega \gg \omega_j).$$

The contribution of the very high frequencies is not larger than in the case of the Fermi field.

Summary of the formulas.

11. — We shall now summarize the main formulas. We shall not take into account the corrections corresponding to the case in which the ionizing particle is an electron, as we did already in section 7 (*). The total rate of loss per cm — dW/dx is

$$(140) \quad -\frac{dW}{dx} = -\frac{dW_{<R}}{dx} - \frac{dW_{>R}}{dx},$$

— $dW_{<R}/dx$ and $dW_{>R}/dx$ being the contributions of distances smaller than R and larger than R , respectively, with

$$(141) \quad R = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}}, \quad \begin{array}{l} (m: \text{mass of the electron}) \\ (n: \text{number of electrons per cm}^3). \end{array}$$

The loss at distances less than R is the sum of two terms:

$$(142) \quad -\frac{dW_{<R}}{dx} = -\frac{dW_{<R_1}}{dx} - \frac{dW_{R_1}^I}{dx}, \quad (R_1 = 10^{-8} \text{ cm}).$$

(*) Our formulas are nevertheless applicable to fast electrons when high energy transfers may be disregarded (see MÖLLER (16)).

$-dW_{<R_1}/dx$ is given by a modified form of the Bethe formula:

$$(143) \quad -\frac{dW_{<R_1}}{dx} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{mv^2} \left[\log \frac{2mv^2 E_{\max}}{I_z(1-\beta^2)} \cdot 2\beta^2 \cdot \sum_j f_j k_0^2(\omega_j) U(\omega_j, R_1) \right],$$

$$(143a) \quad \frac{z_1 e^2}{\hbar v} \ll 1,$$

(v = velocity of the ionizing particle) ($z_1 e$ = charge of the ionizing particle).

The ω and f are the oscillator frequencies (circular) and percentuals, respectively. I_z is the mean ionization potential of the atoms of the ionized medium. The function U is:

$$(144) \quad U(\omega, \varrho) = \varrho^2 \left[\beta^2 \{ K_0^2(\varrho k_0(\omega)) + K_1^2(\varrho k_0(\omega)) \} + \frac{2}{\varrho k_0(\omega)} K_0(\varrho k_0(\omega)) K_1(\varrho k_0(\omega)) \right].$$

The K are modified Hankel functions and

$$(144a) \quad k_0(\omega) = \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2}.$$

$-dW_{R_1}^1/dx$ is the contribution of the distances between R_1 and R :

$$(145) \quad -\frac{dW_{R_1}^1}{dx} = \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{mv^2} \sum_j f_j k_0^2(\omega_j) [U(\omega_j, R_1) - U(\omega_j, R)] + 2\pi \int_{R_1}^R \Omega(\varrho) \varrho d\varrho.$$

The last term in the right hand side of (145) is the correction to the loss at distances less than R due to the polarization at distances larger than R :

$$(146) \quad \Omega(\varrho) = \Omega_1(\varrho) + \Omega_2(\varrho),$$

$$(147) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_1(\varrho) \varrho d\varrho = -\frac{z_1^2 e^2 R^2}{v^2 \epsilon^2} (1-\beta^2) \sum_j \bar{\omega}_j^3 [K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) + K_1(Rk_0(\omega_j)) I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) - 2(\beta^2 Rk_0(\bar{\omega}_j))^{-1} K_0(Rk_0(\omega_j)) I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j)) + \{ Rk_0(\bar{\omega}_j) I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j)) \}^{-1} I_1(Rk_0(\bar{\omega}_j))] \frac{K_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))}{I_0(Rk_0(\bar{\omega}_j))} \text{Res}_{\bar{\omega}_j} \varepsilon(\omega).$$

$\varepsilon(\omega)$ is the dielectric constant of the medium for waves of circular frequency ω :

$$(147a) \quad \bar{\omega}_j \cong \omega_j, \quad (\bar{\omega}_j = \text{pole of } \varepsilon(\omega)), \quad \text{Res}_{\bar{\omega}_j} \varepsilon(\omega) \cong -\frac{2\pi n e^2}{m \omega_j} f_j.$$

The I are modified Bessel functions

$$(147b) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \Omega_1(\varrho) = 0.$$

The correction due to Ω_1 is less important than that due to Ω_2 .

$$(148) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega_2(\varrho) \varrho \, d\varrho \simeq -\frac{8\pi n z_1^2 e^4}{m v^2} \sum_j f_j \left(\frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \right)^2 \left(\frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \right)^2 \times \\ \times [\beta^2 \{I_1^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) - I_0^2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))\} + 2(Rk_0(\tilde{\omega}_j))^{-1} I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))] \times \\ \times [I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))]^{-2}.$$

($\tilde{\omega}_j$ -pole of $B(\omega)$ close to ω_j).

$$(148a) \quad [B(\omega)]^{-1} = R \left[K_1(Rk(\omega)) I_0(Rk_0(\omega)) k(\omega) + \right. \\ \left. + \frac{k^2(\omega)}{\varepsilon(\omega) k_0(\omega)} K_0(Rk(\omega)) I_1(Rk_0(\omega)) \right],$$

$$(148b) \quad k^2(\omega) = \frac{\tilde{\omega}^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)), \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg k(\omega) < \frac{\pi}{2}, \quad \omega \gg 0 \right).$$

$-dW_{<R}/dx$ corresponds to direct ionization and excitation. The loss due to the emission of Cerenkov radiation is included in $-dW_{>R}/dx$:

$$(149) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = -\frac{dW_{\text{Cer}}}{dx} - \frac{2z_1 e^2}{v^2} \sum_j \left[I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \frac{\tilde{\omega}_j R}{v \sqrt{1 - \beta^2}} \right]^{-1} \tilde{\omega}_j \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega = \tilde{\omega}_j)}^{-1},$$

$$(149a) \quad -\frac{dW_{\text{Cer}}}{dx} = -\frac{z_1^2 e^2}{v^2} \int_{\substack{1-\beta^2\varepsilon < 0 \\ \omega > 0}} |B(\omega)|^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) \omega \, d\omega,$$

$$(149b) \quad D(\omega) = [K_1(Rk(\omega)) Rk(\omega) B(\omega)]^{-1},$$

$$(149c) \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{(\omega = \tilde{\omega}_j)}^{-1} \cong \frac{4\pi n e^2 f_j}{n \tilde{\omega}_j I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{(1 - \varepsilon(\tilde{\omega}_j))^2},$$

$$(150) \quad \lim_{v \rightarrow 0} \left(-\frac{dW_{>R}}{dx} \right) \cong \frac{2\pi n z_1^2 e^4}{m v^2}.$$

All the preceding formulas correspond to the case of a real dielectric constant and are not valid when there are conduction electrons. The case of a medium with conduction electrons presents special difficulties. Nevertheless

some of the formulas derived in the preceding sections are still valid in this case. For instance, we get from (46) an expression of $-dW_{>R}/dx$ which is general:

$$(151) \quad -\frac{dW_{>R}}{dx} = \frac{2z_1^2 e^2 R}{\pi v^2} \mathcal{R} \int_0^\infty |B(\omega)|^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) k^*(\omega) K_1(Rk^*(\omega)) K_0(Rk(\omega)) i\omega d\omega.$$

The expression (95) of $\Omega(\varrho)$ is also general and allows us to get a general formula for $\int_{R_1}^R \Omega(\varrho) \varrho d\varrho$:

$$(152) \quad 2\pi \int_{R_1}^R \Omega(\varrho) \varrho d\varrho \cong \frac{z_1^2 e^2 R^2}{2v^2 c^2} (1 - \beta^2) \mathcal{R} \left[\frac{i\pi}{2} \int_0^\infty \varepsilon(\omega) C(\omega) |\varepsilon(\omega)|^2 \{ I_1^2(Rk_0(\omega)) - I_0^2(Rk(\omega)) + \right. \\ \left. + 2(\beta^2 Rk_0(\omega))^{-1} I_0(Rk_0(\omega)) I_1(Rk_0(\omega)) \} \omega^3 d\omega - \right. \\ \left. - \int_0^\infty \varepsilon(\omega) (C(\omega) + C(-\omega)) \{ K_0(Rk_0(\omega)) I_0(Rk_0(\omega)) + K_1(Rk_0(\omega)) I_1(Rk_0(\omega)) - \right. \\ \left. - 2(\beta^2 Rk_0(\omega))^{-1} K_0(Rk_0(\omega)) I_1(Rk_0(\omega)) \} \omega^3 d\omega \right],$$

$$(152a) \quad C(\omega) = \frac{2}{i\pi} \left[\frac{k^2(\omega)}{k_0^2(\omega)} \varepsilon^{-1}(\omega) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) - K_0(Rk_0(\omega)) \right] \{ I_0(Rk_0(\omega)) \}^{-1},$$

Discussion of some experimental results.

12. — We shall examine only some of the existing experimental results in this paper, a more systematic discussion will be published later. We shall not consider here the experimental results regarding only the effects of the polarization on the stopping power, since our main interest is in the relative contributions of ionization-excitation and Cerenkov radiation to the stopping power.

The most important experimental results, from the point of view we are assuming, are those of GOSH, JONES and WILSON⁽¹⁴⁾ for mesons in oxygen. In this case the increase of the ionization after the minimum is considerable, and the difficulty of explaining it with the theory on Fermi's lines is obvious. Indeed, all the relativistic increase in that theory is due to the emission of Cerenkov radiation and the absorption of the radiation within about 2 mm is required to explain the experimental value of the increase. The present theory leads to an increase of ionization of about 30%, by neglecting the

ionization due to the absorption of Cerenkov radiation. (The loss at distances larger than R is almost entirely due to Cerenkov radiation, as shown by the discussion of section 5). This value agrees satisfactorily with the experimental one. It is important to remark that the theoretical value of the total increase is obtained by comparing the loss at the minimum with the loss at saturation, and is not affected by the uncertainty on the values of the oscillator frequencies ω_j and oscillator percentuals f_j , since in the region of the minimum

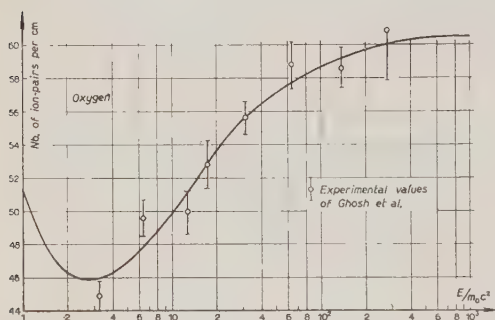


Fig. 3. — Total rate of ionization (transfers less than 1000 eV).

in fig. 3, which corresponds to the values of the ν_j and f_j , given in table I. There is some uncertainty in these values, but the effect on the rate of loss is not considerable. The agreement with the experimental data is satisfactory, by taking as 34.5 eV the average energy necessary to create an ion pair. The transfers in close collisions were cut at 1000 eV.

In the case of silver and bromine, the results were found not to be very sensitive to the choice of the ω_j and f_j . The two sets of values A and B of table I led to results differing always by less than 0.5%. The mean ionization potentials of Ag and Br were taken as 470 eV and 367.5 eV respectively, by interpolating the data of MATHER and SEGRÉ⁽¹⁹⁾ and taking into account those of BAKKER and SEGRÉ⁽²⁰⁾. The energy transfers in close collisions were cut at 5000 eV (see JANSSENS and HUYBRECHTS⁽²¹⁾). The results are insensitive to the choice of this cut-off value. By neglecting the absorption of Cerenkov radiation, the increase in ionization from the minimum to the plateau in AgBr

of ionization the rate of loss in a gas depends only on the mean ionization potential and the value at saturation does not depend on the ω_j and f_j . The mean ionization potential was taken as 89.2 eV for oxygen, i.e. the experimental value obtained by LIVINGSTON and BETHE⁽¹⁸⁾ for air multiplied by 8/7.22.

The variation of the rate of ionization for oxygen at normal conditions is shown

(18) M. S. LIVINGSTON and H. BETHE: *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 246 (1937).

(19) R. MATHER and E. SEGRÉ: *Phys. Rev.*, **84**, 191 (1951).

(20) C. J. BAKKER and E. SEGRÉ: *Phys. Rev.*, **81**, 489 (1951).

(21) P. JANSSENS and M. HUYBRECHTS: *Bull. Cent. Phys. Nucl. Brux.*, n. 27 (1951).

crystals was found to be 3.8%. The total rate of loss, including Cerenkov radiation, with transfers in close collisions cut at 5000 eV is of 5.96 MeV/cm at saturation, the corresponding value in the theory on Fermi's lines being 6.42 MeV/cm. The value 3.8% seems too low to explain the observed increase of grain density of about 7%. Moreover the saturation of the grain density occurs faster than that of the total rate of ionization. The discrepancy between the theoretical results and experimental data can be considerably at-

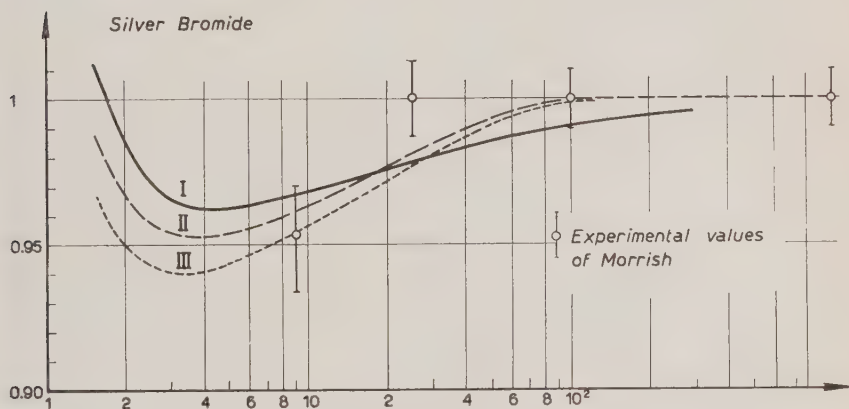


Fig. 4. - Total rate of ionization (transfers less than 5000 eV). Curve I: Contributions of all the shells. Curve II: Contribution of the outer shell ($j = 1$) neglected. Curve III: Contributions of the outer shell and one third of that of the second shell ($j = 2$) neglected.

nuated by taking into account that small energy transfers are probably not sufficient to develop a grain of AgBr. By neglecting the contribution of the electrons of the outer shell, the increase from minimum to saturation becomes 4.8%, and an increase of 6% is obtained by neglecting entirely the contribution of the outer shell and 33% of the contribution of the next shell; this procedure leads also to a faster saturation. The theoretical results and the experimental values of MORRISH⁽²²⁾ are compared in fig. 4 (*). The agreement seems satisfactory, when the small energy transfers are neglected, although the saturation of the grain density is still faster than that of the reduced theoretical loss. The eventual existence of an instrumental cut-off of the very small transfers in the photographic emulsion can

(22) A. H. MORRISH: *Phil. Mag.*, **43**, 533 (1952).

(*) The normalizations of the three curves in fig. 4 are of course different, in order to get the same saturation plateau.

TABLE I.

j	Silver Bromide				Oxygen		
	Shells	$82 f_j$	ν_j		Shells	$8 f_j$	ν_j
			A	B			
1	N Br	8.4	1.025	1.502	L 2p	4.2	54.31
2	N Ag	20.4	3.33	3.33	L 2s	2.0	108.62
3	M Br	18.0	7.18	6.00	K	1.8	727.10
4	M Ag	18.0	10.62	10.62			
5	L Br	7.2	33.50	33.50			
6	L Ag	7.2	72.45	72.45			
7	K Br	1.4	277.80	277.80			
8	K Ag	1.4	526.60	526.60			
α	$11.76 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$				$0.1861 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$		
R	$4.065 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$				$2.562 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$		
I_z	Ag 470 eV Br 367.5 eV				89.2 eV		

$$\nu_j = \frac{\omega_j}{2\pi\alpha}.$$

be put in evidence by accurate measurements in the region before the minimum of ionization, where the polarization effects are very small. Such an effect would make the effective mean ionization potential for the developing of grains in the photographic emulsion higher than the true mean ionization potential. The effective mean ionization potential for the developing of grains may eventually depend on the average size of the grains and other conditions affecting their sensitivity, as well as on the processing of the plate.

Unpublished results of VOJVODIC (*) for π -mesons and electrons in the photographic plate show also an increase of about 6-7% and the agreement with the present theory seems quite satisfactory by assuming the existence of the instrumental effect discussed in connection with the MORRISH data. The results of L. JAUNEAU and F. HUG-BOUSSER (23) show the existence of an increase of the grain density after the minimum in the photographic emulsion, but the scatter of the results in different series of measurements appears to be considerable and a precise evaluation of the increase after the minimum is difficult.

The results for the photographic emulsion can probably be improved by

(*) Private communication.

(23) L. JAUNEAU and F. HUG-BOUSSER: *Journ. de Phys.* (in press).

using a more accurate expression of the dielectric constant, in which the effect of a shell is not assimilated to that of a single oscillators (see WICK (2)).

Note added in proof. — Dr. A. H. MORRISH has called our attention to the paper of MC DIARMID (*Phys. Rev.*, **84**, 851 (1951)), whose results agree rather better with ours with respect to the beginning of the saturation in photographic emulsions.

APPENDIX I.

Let us denote by $F(\omega)$ the quantity within the square brackets in (40):

$$(1) \quad F(\omega) = \frac{2\varepsilon(\omega)}{Rk_c(\omega)} \frac{K_1(Rk_c(\omega))}{K_0(Rk_c(\omega))} + 1.$$

It was shown in references (5) and (6) that the ω corresponding to real values or poles of the function $\varepsilon(\omega)$ defined by (42) have negative imaginary parts, when the damping constants are not 0. $F(\omega)$ has therefore no other singularities in the quadrant of the positive real and positive imaginary axis besides that at the point $\omega = 0$. In order to show that $F(\omega)$ has no zeros in this region, we shall consider the closed contour Γ formed by an infinitesimal quarter of circle centred at the origin, the positive real and positive imaginary axes and a quarter of circle centred at the origin with infinite radius. $F(\omega)$ is real and positive on the positive imaginary axis and on the infinite quarter of circle, and the variation of its argument along the infinitesimal quarter of circle and the positive real axis is equal to zero. Since the variation of the argument of $F(\omega)$ along the closed contour Γ is equal to zero and $F(\omega)$ has no poles, either on the contour or inside it, when the damping constants in (42) are not 0, it follows from the argument principle that it has no zeros in that region.

$F(\omega)$ is related to the function $D(\omega)$ defined by (52):

$$(2) \quad F(\omega) = \frac{2\varepsilon(\omega)}{Rk_c(\omega)} \frac{K_1(Rk_c(\omega))}{K_0(Rk_c(\omega))} D_c(\omega),$$

$$(3) \quad D_c(\omega) = \lim_{v \rightarrow c} D(\omega) = \frac{Rk_c(\omega)}{2\varepsilon(\omega)} \frac{K_0(Rk_c(\omega))}{K_1(Rk_c(\omega))} + 1.$$

We have shown that $D(\omega)$ has zeros in the neighbourhoods of the ω_j , whose imaginary parts are negative when the damping constants are finite. It results from (2) and (3) that, in this case, $F(\omega)$ has also zeros in the neighbourhoods of the ω_j , with negative imaginary parts.

We shall now prove that, in the case of a real $\varepsilon(\omega)$, the function $D(\omega)$ has

no zeros in the Cerenkov bands. It follows from (52) that, at a zero $\tilde{\omega}$ of $D(\omega)$:

$$(4) \quad \frac{K_0(Rk(\tilde{\omega}))}{K_1(Rk(\tilde{\omega}))} = - \frac{I_0(Rk_0(\tilde{\omega}))}{I_1(Rk_0(\tilde{\omega}))} \frac{k_0(\tilde{\omega})}{k(\tilde{\omega})} \varepsilon(\tilde{\omega}).$$

If $\tilde{\omega}$ would lie in a Cerenkov band, we would have:

$$(5) \quad \arg \left[\frac{K_0(-iR|k(\tilde{\omega})|)}{K_1(-iR|k(\tilde{\omega})|)} \right] - \arg \left[-i \frac{H_0^{(1)}(R|k(\tilde{\omega})|)}{H_1^{(1)}(R|k(\tilde{\omega})|)} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

It follows from (5) that:

$$(6) \quad \arg \left[\frac{J_0(R|k(\tilde{\omega})|) + iN_0(R|k(\tilde{\omega})|)}{J_1(R|k(\tilde{\omega})|) + iN_1(R|k(\tilde{\omega})|)} \right] \neq 0.$$

Since $J(u)$ and $J_1(u)$ do not vanish simultaneously for any real value of u and the same happens with $N_0(u)$ and $N_1(u)$, equation (6) will only be satisfied when $k(\tilde{\omega}) = 0$. It is therefore not compatible with (4).

APPENDIX II.

It results from (22) that:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) - \left(\frac{1}{\varepsilon(-\omega)} - \beta^2 \right) B(-\omega) K_0(Rk(-\omega)) = \\ & B(\omega) B(-\omega) \left[B^{-1}(-\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(\omega)) - B^{-1}(\omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(-\omega)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(-\omega)) \right] \\ & = RI_0(Rk_0(\omega)) B(\omega) B(-\omega) \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(\omega)) K_1(Rk(-\omega)k(-\omega)) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{\varepsilon(-\omega)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(-\omega)) K_1(Rk(\omega)k(\omega)) \right], \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} (2) \quad & \mathcal{R} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) i\omega \right] = \\ & = RI_0(Rk_0(\omega)) |B(\omega)|^2 \mathcal{R} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(\omega)) K_1(Rk(-\omega)k(-\omega)) i\omega \right]. \end{aligned}$$

This equation shows that (39) is equivalent to (46) for $\varrho = R$.

In the Cerenkov bands $\arg k(\omega) = -\pi/2$, therefore:

$$(3) \quad k(-\omega) = \exp[i\pi]k(\omega), \quad (\omega > 0, 1 - \beta^2\varepsilon(\omega) < 0).$$

By taking into account the well known formulas

$$(4) \quad K_0(\exp[i\pi]u) = K_0(u) - i\pi I_0(u), \quad K_1(\exp[i\pi]u) = -K_1(u) - i\pi I_1(u),$$

and (21), we can simplify (2) in the Cerenkov bands:

$$(5) \quad \Re \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) i\omega \right] = \\ = -\frac{\pi}{2} \omega \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) I_0(Rk_0(\omega)) |B(\omega)|^2, \quad (\omega > 0, 1 - \beta^2\varepsilon(\omega) < 0).$$

It results from (5) that the first term in the right hand side of (62) is equal to the right hand side of (59).

When the damping constants are finite, we can obtain regular analytic functions in a strip around the real positive ω -axis starting from the functions $k(\omega)$ and $B(\omega)$ defined on that axis by (16) and (22), with

$$(6) \quad k_0(\omega) = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2},$$

$k(-\omega)$ and $B(-\omega)$, as defined by (16) and (22), are not obtained by analytical continuation of the regular analytic functions $k(\omega)$ and $B(\omega)$. We shall introduce the analytic functions $\bar{k}(\omega)$ and $\bar{B}(\omega)$ defined by the equations:

$$(7) \quad \bar{k}(\omega) = k^*(\omega), \quad \bar{B}(\omega) = B^*(\omega), \quad (\omega > 0).$$

It results from the well known symmetry principle of Riemann and Schwarz (*) that, with a suitable choice of the branches:

$$(8) \quad k(\omega) = (\bar{k}(\omega^*))^*, \quad B(\omega) = (\bar{B}(\omega^*))^*.$$

By introducing the function $G(\omega)$

$$(9) \quad G(\omega) = \omega \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) [1 - RI_0(Rk_0(\omega)) \bar{B}(\omega) K_1(R\bar{k}(\omega)) \bar{k}(\omega)],$$

equation (1) can be written as:

$$(10) \quad \Im m G(\omega) = 0 \quad \text{for} \quad \omega > 0.$$

(*) See, for instance, Z. NEHARI: *Conformal Mapping* (New York, 1952) p. 184.

Hence we have

$$(11) \quad G(\omega^*) = (G(\omega))^*,$$

as a consequence of the symmetry principle. It results from (11) that:

$$(12) \quad \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} G(\omega) = - \left\{ \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} G(\omega) \right\}^*.$$

This equation can be obtained by comparing the values of $\int_F G(\omega) d\omega$ and $\int_{F^*} G(\omega) d\omega$, F being a circle with sufficiently small radius centred at the point $\tilde{\omega}'_j + i\tilde{\eta}_j$ and F^* the circle with the same radius centred at $\tilde{\omega}'_j - i\tilde{\eta}_j$, both circles being described in the same sense. By introducing the expression (9) of G into (12), we get:

$$(13) \quad \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) \bar{B}(\omega) I_0(Rk_0(\omega)) K_0(Rk(\omega)) K_1(R\bar{k}(\omega)) R\bar{k}(\omega) \omega \right] + \\ + \left\{ \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) \bar{B}(\omega) I_0(Rk_0(\omega)) K_0(Rk(\omega)) K_1(R\bar{k}(\omega)) R\bar{k}(\omega) \omega \right] \right\} = \\ = \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) \omega \right].$$

In the limit of zero damping constants, equation (13) becomes:

$$(14) \quad \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B^2(\omega) I_0(Rk(\omega)) K_0(Rk(\omega)) K_1((\omega)) Rk(\omega) \omega \right] = \\ = \left(\frac{1}{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)} - \beta^2 \right) K_0(Rk(\tilde{\omega}_j)) \tilde{\omega}_j \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} B(\omega).$$

It is easily seen that for any analytic symmetric function $H(k(\omega), \bar{k}(\omega); \omega)$

$$(15) \quad H(k(\omega), \bar{k}(\omega); \omega) = H(\bar{k}(\omega), k(\omega); \omega),$$

regular in neighbourhood of the poles $\tilde{\omega}'_j \pm i\tilde{\eta}_j$ of $\varepsilon(\omega)$ and taking real values for positive ω , we have:

$$(16) \quad \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} \left[H(k(\omega), \bar{k}(\omega); \omega) B(\omega) K_0(Rk(\omega)) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) \omega \right] = \\ = \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} L(\omega) + \operatorname{Res}_{\substack{\omega'_j + i\tilde{\eta}_j \\ \omega'_j - i\tilde{\eta}_j}} L(\omega),$$

with:

$$(17) \quad L(\omega) = H(k(\omega), k(\omega); \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) \times \\ \times B(\omega) \bar{B}(\omega) I_0(Rk_0(\omega)) K_0(R\bar{k}(\omega)) K_1(R\bar{k}(\omega)) R\bar{k}(\omega) \omega.$$

In the limit of zero damping constants, we get:

$$(18) \quad H(k(\tilde{\omega}_j), k(\tilde{\omega}_j); \tilde{\omega}_j) K_0(Rk(\tilde{\omega}_j)) \left(\frac{1}{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)} - \beta^2 \right) \tilde{\omega}_j \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} B(\omega) = \\ = \operatorname{Res}_{\tilde{\omega}_j} \left[H(k(\omega), k(\omega); \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) B^2(\omega) I_0(Rk_0(\omega)) K_0(Rk(\omega)) K_1(Rk(\omega)) Rk(\omega) \omega \right].$$

This equation shows how it is possible to transform the expression of the loss at distances larger than R by direct ionization-excitation obtained from the equation (58) of section 4 into that given by (62) of section 5, which involves only the residue of $[D(\omega)]^{-1}$.

APPENDIX III.

We shall now prove formula (109) of section 8. In order to get an approximate value of $dD/d\omega$ at the zero $\tilde{\omega}_j$, we shall start from the formula (52) of section 4 and we shall neglect the variation of the functions I , as well as the variation of the ratio of the two K functions. We may write:

$$(1) \quad D(\omega) = I_0(Rk_0(\omega)) + \frac{K_0(Rk(\omega))}{K_1(Rk(\omega))} \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}}{\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}} I_1(Rk_0(\omega)).$$

With the aforementioned approximations we get:

$$(2) \quad \frac{dD}{d\omega} \simeq \frac{K_0(Rk(\tilde{\omega}_j))}{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))} \frac{I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{d}{d\omega} [\varepsilon^{-1}(\omega) \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}].$$

Since

$$(3) \quad \frac{d}{d\omega} [\varepsilon^{-1}(\omega) \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}] = - \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}}{2\varepsilon(\omega)} \frac{2 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)} \varepsilon^{-1}(\omega) \frac{d\varepsilon}{d\omega},$$

and

$$(4) \quad \varepsilon^{-1}(\tilde{\omega}_j) \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))}{K_0(Rk(\tilde{\omega}_j))} \frac{I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))}{I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))},$$

we have:

$$(5) \quad \left\{ \frac{d}{d\omega} [\varepsilon^{-1}(\omega) \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)}] \right\}_{\omega = \tilde{\omega}_j} = \\ = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{K_1(Rk(\tilde{\omega}_j))}{K_0(Rk(\tilde{\omega}_j))} \frac{I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))}{I_1(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} \frac{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \varepsilon^{-1}(\tilde{\omega}_j) \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_{\omega = \tilde{\omega}_j}.$$

It results from (2) and (5) that:

$$(6) \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\omega = \tilde{\omega}_j} \cong \frac{1}{2} I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j)) \frac{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)_{\omega = \tilde{\omega}_j} \varepsilon^{-1}(\tilde{\omega}_j).$$

It results from formula (50) of section 4, combined with formula (119) of section 9, that in the neighbourhood of $\tilde{\omega}_j$ we have:

$$(7) \quad \varepsilon^{-1}(\omega) \cong 1 + \frac{4\pi^2 \alpha^2 f_j}{\omega^2 - \tilde{\omega}_j^2}.$$

We get from (7)

$$(8) \quad \varepsilon^{-1}(\omega) \frac{d\varepsilon}{d\omega} = -\varepsilon(\omega) \frac{d}{d\omega} \varepsilon^{-1}(\omega) \cong -\frac{\omega(\varepsilon(\omega) - 1)^2}{2\pi^2 \alpha^2 f_j \varepsilon(\omega)},$$

hence

$$(9) \quad \left(\frac{dD}{d\omega} \right)_{\omega = \tilde{\omega}_j}^{-1} \cong \frac{4\pi n e^2 f_j}{m \tilde{\omega}_j I_0(Rk_0(\tilde{\omega}_j))} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{2 - \beta^2 \varepsilon(\tilde{\omega}_j)} \frac{\varepsilon(\tilde{\omega}_j)}{(\varepsilon(\tilde{\omega}_j) - 1)^2}.$$

This is formula (109) of section 8.

It is interesting to remark that formula (66) of section 5 can be obtained immediately from (9). This is important because (66), for extremely relativistic energies, gives a good approximation when $\tilde{\omega}_j$ differs little from $\bar{\omega}_j$, whereas (7) is only satisfactory when ω differs little from $\bar{\omega}_j$. Formula (9) gives therefore a good approximation when $\tilde{\omega}_j$ is close to either $\bar{\omega}_j$ or ω_j , i.e. for an entire interval which contains $\tilde{\omega}_j$, at least for extremely relativistic energies.

RIASSUNTO (*)

Si formula una teoria della perdita d'energia di una particella carica, in cui il meccanismo della perdita è differente da quello della teoria di Fermi. La nostra teoria conduce a una distribuzione della perdita tra l'eccitazione per ionizzazione e l'emis-

(*) Traduzione a cura della Redazione.

sione di radiazione Cerenkov che differisce notevolmente da quelle delle teorie del tipo di quella di Fermi, per quanto il potere di frenamento non sia essenzialmente diverso, essendo soltanto nella nostra teoria alquanto minore che in quelle. Questo trattamento conduce a un aumento della ionizzazione diretta per parametri d'urto maggiori delle dimensioni atomiche dopo il minimo relativistico, l'aumento essendo considerevole nel caso dei gas. L'effetto di saturazione di Fermi della perdita a distanze superiori alle dimensioni atomiche esiste anche nella nostra teoria, per quanto in virtù di un differente meccanismo. L'aumento relativistico della perdita nelle interazioni a distanza è dovuto largamente a un aumento dei raggi d'azione per la ionizzazione e l'eccitazione (meccanismo di Bohr-Williams), ma è dovuto anche a un contributo della radiazione di Cerenkov (meccanismo di Fermi). La saturazione è dovuta a una limitazione dell'aumento dei raggi d'azione dovuta alla polarizzazione del mezzo e alla saturazione dell'emissione di radiazione Cerenkov. La presente teoria conduce a una modificazione della formula di Frank e Tamm per il tasso d'emissione della radiazione Cerenkov. L'emissione di radiazione Cerenkov di elevata energia essendo considerevolmente ridotta.

Sulla corrispondenza tra elettrodinamica classica e quantistica.

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 2 Luglio 1952)

Riassunto. — Si mostra come nel caso non relativistico e di dipolo esiste una completa corrispondenza tra l'equazione di Dirac-Eliezer classica dell'elettrone puntiforme e l'equazione che in elettrodinamica quantistica regola la variazione col tempo del valor medio quantistico in uno stato (expectation-value) della posizione dell'elettrone stesso. Nel caso di un oscillatore armonico la corrispondenza è così stretta che il valor medio quantistico della posizione dell'oscillatore soddisfa proprio all'equazione di Dirac-Eliezer. Come conseguenza di questo si ha che, per lo meno nel caso dell'oscillatore armonico, l'introduzione della costante di Planck non toglie le difficoltà delle soluzioni fisiche e non fisiche dell'equazione di Dirac-Eliezer. Ed inoltre, nella variazione col tempo del sopramenzionato valor medio, si ha, sia pure in un caso particolare, un esempio di risoluzione di un problema di elettrodinamica quantistica completamente indipendente dalla teoria delle perturbazioni.

Introduzione.

Nel presente lavoro vogliamo mostrare come, almeno nel caso non relativistico (n.r.) e nell'approssimazione di dipolo (d), esista una interessante corrispondenza tra l'equazione di DIRAC-ELIEZER ^(1,2,3,4) (D-E) classica dell'elettrone puntiforme e l'equazione la quale in elettrodinamica quantistica regola la variazione col tempo del valor medio in uno stato (expectation-value) della posizione dell'elettrone stesso. Sempre nelle approssimazioni sopra accennate

⁽¹⁾ P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc.*, A **167**, 148 (1938).

⁽²⁾ J. ELIEZER: *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 147 (1947).

⁽³⁾ M. MARKOV: *J. Phys. USSR*, **10**, 159 (1946).

⁽⁴⁾ D. BOHM e M. WEINSTEIN: *Phys. Rev.*, **74**, 1789 (1948).

e nel caso particolare di un elettrone soggetto a una forza elastica di richiamo (oscillatore armonico) la corrispondenza è così stretta che il valor medio quantistico della posizione dell'oscillatore soddisfa proprio all'equazione di D-E.

Per stabilire la ora detta corrispondenza, nel § 1, nelle approssimazioni sopra riferite, dedurremo l'equazione (non relativistica) di D-E dal formalismo hamiltoniano; nel § 2 mostreremo come la stessa deduzione possa essere svolta, riferendosi ai valori medi, nel caso quantistico e specializzeremo le formule al caso accennato in cui la corrispondenza è più stretta, cioè al caso dell'oscillatore armonico; nel § 3, per mostrare che l'hamiltoniana usata nelle approssimazioni n.r. e d. è abbastanza generale, ed oltre a ciò per completare un nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾, dedurremo brevissimamente da essa, sempre per l'oscillatore armonico, il Lamb-shift. Seguirà nel § 4 una breve discussione. Alcuni calcoli saranno svolti in appendice.

1. - L'hamiltoniana dalla quale partiremo (nella quale gli oscillatori longitudinali e scalari sono stati eliminati) sarà dunque la seguente:

$$(1) \quad {}^cH = \frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}) - \frac{e}{m_0 c} \sum_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{p}) q_k + \frac{e^2}{2m_0 c^2} \sum_{k, k'} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}) q_k q_{k'} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k (c^2 p_k^2 + k^2 q_k^2).$$

In (1) le notazioni sono quelle stesse del WENTZEL ⁽⁶⁾. L'indice c in alto è stato inserito per ricordare il fatto che in questo § le variabili che compaiono in (1) sono variabili dinamiche classiche (numeri c). Nel prossimo §, in cui faremo uso della stessa hamiltoniana essa sarà invece affissa di un indice q a denotare che le grandezze che in essa compaiono sono degli operatori (numeri q). $V(\mathbf{x})$ in (1) è l'energia potenziale di un campo esterno di forze, m_0 la massa meccanica dell'elettrone; l'indice di polarizzazione è sempre sottinteso.

Notiamo che l'hamiltoniana (1) contiene (nel quarto termine) la diffusione della radiazione (formula di Thompson).

Le equazioni di Hamilton associate all'hamiltoniana (1) sono:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m_0} \mathbf{p} - \frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \mathbf{e}_k q_k, \\ \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \\ \dot{q}_k = c^2 p_k, \\ \dot{p}_k = -k^2 q_k + \frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k) - \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{1}{V} \sum_{k'} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}) q_{k'}, \end{array} \right.$$

⁽⁵⁾ G. MORPURGO: *Nuovo Cimento*, **7**, 313 (1950).

⁽⁶⁾ G. WENTZEL: *Quantum Theory of fields*. (Interscience Publishers, 1949).

dalle quali si ricava:

$$(3) \quad m_0 \ddot{\mathbf{x}} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e}{c} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \mathbf{e}_k \dot{q}_k,$$

$$(4) \quad \ddot{q}_k + c^2 k^2 q_k = \frac{ec}{V^{1/2}} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_k).$$

Il secondo termine a secondo membro della (3) è semplicemente il campo elettrico nella posizione dell'elettrone: si tenga presente che è:

$$\mathbf{E}_{tr} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_{tr}}{\partial t}, \quad \mathbf{A}_{tr} = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \mathbf{e}_k q_k \exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}].$$

La soluzione generale della (4) è:

$$(5) \quad q_k(t) = \frac{e}{V^{1/2}} \frac{1}{k} \int_{t_0}^t (\mathbf{e}_k \cdot \dot{\mathbf{x}}(s)) \sin kc(t-s) ds + \\ + q_{k0} \cos kc(t-t_0) + \dot{q}_{k0} \frac{1}{kc} \sin kc(t-t_0),$$

dove q_{k0} e \dot{q}_{k0} rappresentano i valori iniziali (al tempo $t = t_0$) di $q_k(t)$ e della sua derivata.

La questione di quali debbono essere tali valori iniziali è probabilmente in relazione con il problema delle soluzioni fisiche e non fisiche dell'equazione di D-E. Noi non vogliamo qui discutere questa questione e porremo perciò, come si fa (sottintendendo la cosa) di solito, quando l'equazione di D-E viene dedotta ammettendo che il campo nella posizione dell'elettrone sia quello dovuto ai soli potenziali ritardati:

$$(6) \quad q_{k0} = \dot{q}_{k0} = 0.$$

Ci limiteremo inoltre a discutere soluzioni della (3) in cui $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \equiv \dot{\mathbf{x}}_0 = 0$. Se si impone la (6) è ragionevole imporre questa condizione.

Sostituendo la (5) (in cui sia stato fatto $q_{k0} = \dot{q}_{k0} = 0$) in (3), con successive integrazioni per parti e facendo uso dell'integrale di Dirichlet si giunge rapidamente (v. appendice I) alla equazione di D-E n.r.:

$$(7) \quad m \ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\mathbf{x}},$$

dove si è posto

$$m = m_0 + m_{em}; \quad m_{em} = \frac{e^2}{3\pi^2 c^2} \int_0^\infty dk,$$

ossia si è rinormalizzata la massa.

Come abbiamo detto non vogliamo qui discutere la (7); essa è già stata oggetto di numerose discussioni; il problema delle sue soluzioni fisiche e non fisiche resta ancora un problema aperto. L'unica osservazione⁽⁷⁾ che vogliamo fare è che, se si impongono le condizioni iniziali sul campo, la condizione iniziale sull'accelerazione non è imponibile arbitrariamente ma è determinata dalla (3). Se come abbiamo supposto è $q_{k0} = \dot{q}_{k0} = 0$ risulta

$$(8) \quad \ddot{\mathbf{x}}_0 = -\frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)_{t=t_0}.$$

Si noti che nella condizione iniziale (8), che come abbiamo detto *deve* essere imposta se le condizioni iniziali sul campo sono le (6), compare la sola massa meccanica m_0 (che non ha significato fisico) e non la massa $m = m_0 + m_{em}$ che compare nell'equazione di D-E e che è la sola ad aver significato fisico. Ciò fa pensare che le (6) non siano le corrette condizioni iniziali da imporsi al campo.

2. - Se \mathbf{x} , \mathbf{p} , q_k , p_k vengono in (1) interpretati come operatori soddisfacenti alle usuali regole di commutazione, (1) diventa l'hamiltoniana dell'elettrodinamica quantistica e come tale sarà indicata con aH . La generica funzione d'onda del nostro sistema sarà indicata con $\Psi(\mathbf{x}, q_k, t)$ (essendo sottinteso che è funzione di tutte le q_k) ed il valor medio all'istante t di un generico operatore O nello stato $\Psi(\mathbf{x}, q_k, t)$ sarà indicato con $\langle \Psi^*(t) | O | \Psi(t) \rangle$ o anche più brevemente con $\bar{O}(t)$ o infine anche con \bar{O} semplicemente:

$$\bar{O}(t) = \int \Psi^*(\mathbf{x}, q_k, t) O \Psi(\mathbf{x}, q_k, t) d^3\mathbf{x} \prod_k dq_k.$$

È allora ovvio che le equazioni che regolano la variazione col tempo dei valori medi degli operatori \mathbf{x} , \mathbf{p} , q_k , p_k , hanno esattamente la stessa forma delle equazioni (2) che regolano la variazione col tempo delle variabili classiche \mathbf{x} , \mathbf{p} , q_k , p_k . Ossia hanno la forma:

$$((2')) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{p}} - \frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \mathbf{e}_k \bar{q}_k, \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} = - \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \dot{\bar{q}}_k = c^2 \bar{p}_k, \\ \dot{\bar{p}}_k = -k^2 \bar{q}_k + \frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} (\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_k) - \frac{e^2}{m_0 c^2} \frac{1}{V} \sum_{k'} (\mathbf{e}_{k'} \cdot \mathbf{e}_k) \bar{q}_{k'}. \end{array} \right.$$

(7) Questa osservazione è dovuta a MARKOF⁽³⁾; indipendentemente, il prof. B. FERRETTI mi ha fatto rilevare la cosa durante una discussione per la quale gli sono grato.

La cosa è un'ovvia conseguenza del fatto che:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \bar{O} = \frac{i}{\hbar} \overline{[{}^e H O - O {}^e H]},$$

e che

$$O_1 + O_2 = \bar{O}_1 + \bar{O}_2.$$

Procedendo a partire dalle (6') in maniera completamente identica a quella del § 1 e imponendo le condizioni

$$\bar{q}_{k0} = \dot{\bar{q}}_{k0} = 0,$$

si ricava l'equazione:

$$(10) \quad m \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}.$$

La (10) è una equazione che lega la derivata seconda e la derivata terza di $\bar{\mathbf{x}}$ con il valor medio di $\partial V / \partial \mathbf{x}$ nello stato che si è preso in considerazione (che è del tutto generico). Ora il valor medio di $\partial V / \partial \mathbf{x}$ in generale non può essere espresso mediante $\bar{\mathbf{x}}$. Tuttavia un caso importante è quello in cui si abbia $V = 1/2 \sigma x^2$ (oscillatore armonico di costante di elasticità σ). In tal caso $\partial V / \partial \mathbf{x} = \sigma \bar{\mathbf{x}}$ e quindi la (10) si riscrive:

$$(11) \quad m \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \sigma \bar{\mathbf{x}} = \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}.$$

Questa equazione è una equazione differenziale in $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ed è perfettamente identica all'equazione in $\mathbf{x}(t)$ che si ha (per un oscillatore armonico) classicamente. La sua soluzione generale è ben nota ed anzi in questo caso notoriamente esiste anche la soluzione fisica ⁽⁸⁾.

Notiamo che, se si ammette che l'hamiltoniana ${}^e H$ (in cui si ponga $1/2 \sigma x^2$ al posto di $V(\mathbf{x})$) abbia (degli o) uno stato stazionario, in tale stato la (11) è *identicamente* soddisfatta, nel senso che tutti i suoi termini sono identicamente nulli per ogni valore di t ⁽⁹⁾.

⁽⁸⁾ Vedi, ad esempio, A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **6**, 361 (1949).

⁽⁹⁾ La cosa può anche essere controllata direttamente osservando che $\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$, $\ddot{\mathbf{x}}$ sono evidentemente nulli e che $\bar{\mathbf{x}}$ è pure nullo; quest'ultima circostanza dipende dal fatto che ${}^e H$ è invariante rispetto allo scambio di \mathbf{x} in $-\mathbf{x}$ e q_k in $-q_k$, e conseguentemente le autofunzioni appartenenti a stati stazionari sono o pari o dispari rispetto allo scambio simultaneo di \mathbf{x} , q_k in $-\mathbf{x}$, $-q_k$. Perciò il valor medio di \mathbf{x} , che è una funzione dispari, in uno stato stazionario è nullo.

Nel caso generale la (11) permette di determinare *esattamente, cioè a tutti gli ordini in e* , il moto del baricentro di un pacchetto di probabilità dell'elettrone, qualora per lo meno, cosa che può essere dubbia, ci si fidi della soluzione fisica. Discuteremo più a fondo la (11) nel § 4.

3. — In questo numero, per mostrare che l'hamiltoniana che abbiamo usato nella deduzione delle (7) (10), sebbene abbia validità limitata, è tuttavia tale che molte delle caratteristiche dell'hamiltoniana esatta sono in essa rispecchiate, dedurremo, facendo uso di essa, il Lamb-shift di un oscillatore armonico. La cosa è immediata. La trasformazione canonica di funzione generatrice S_1 tale che ⁽¹⁰⁾:

$$(12) \quad [S_1, H_0] = -H_1 \quad [] = \text{parentesi di Poisson}$$

dove

$$(13) \quad H_0 = \frac{1}{2m_0} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} \sigma x^2 + \frac{1}{2} \sum_k (c^2 p_k^2 + k^2 q_k^2),$$

$$(14) \quad H_1 = -\frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{p}) q_k,$$

elimina l'interazione del primo ordine H_1 dando luogo a un'interazione supplementare del secondo ordine pari a: $\frac{1}{2} [S_1, H_1]$. Il Lamb-shift dell'oscillatore armonico in uno stato ψ_n stazionario imperturbato con zero fotoni vale:

$$(15) \quad \langle 0 \psi_n^* | \frac{1}{2} [S_1, H_1] | \psi_n 0 \rangle \text{ rinormalizzato.}$$

Se si sceglie S_1 pari a:

$$(16) \quad S_1 = \frac{e}{m_0 c} \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \frac{\sigma(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k) q_k + c^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_k) p_k}{(\sigma/m_0) - k^2 c^2},$$

la (12) è soddisfatta.

Con la (16) risulta:

$$(17) \quad \frac{1}{2} [S_1, H_1] = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_0^2 c^2} \frac{1}{V} \sum_{k, k'} \frac{\sigma(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}) q_k q_{k'}}{k^2 c^2 - (\sigma/m_0)} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_0^2 c^2} \frac{1}{V} \sum_k \frac{c^2(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{p})^2}{k^2 c^2 - (\sigma/m_0)}.$$

Il secondo termine a secondo membro della (17) è identico a quello che abbiamo ricavato in un precedente lavoro. Il primo termine naturalmente non compariva in tale lavoro in quanto classicamente esso è nullo quando ci si

⁽¹⁰⁾ Nelle (12), (13), (14) le variabili possono essere indifferentemente numeri c o numeri q .

metta in condizioni in cui l'energia del campo elettromagnetico sia nulla come ci si era messi allora; infatti se l'energia del campo elettromagnetico è nulla tutti i q_k sono nulli e quindi tale primo termine scompare.

Ma quantisticamente non possiamo evidentemente annullare i q_k . Sussistono sempre le fluttuazioni del campo elettromagnetico che fanno sì che il primo termine sia in ogni caso non nullo. Ora, come è stato visto nel lavoro citato il secondo termine a secondo membro della (17) vale semplicemente $(m_{em}/2m_0^2)\mathbf{p}^2$ ed è quindi nient'altro che il termine di rinormalizzazione della massa del secondo ordine. È facile controllare che il primo termine è proprio

il responsabile del Lamb-shift. Basta porre in esso $q_k = \sqrt{\frac{\hbar c}{2k}} (a_k^* + a_k)$ e

fare il valor medio in uno stato di data energia imperturbata e con zero fotoni. Il calcolo è immediato ⁽¹¹⁾ e lo accenniamo in appendice II. Quello che ci interessa è di aver mostrato come la hamiltoniana 2H da noi considerata contenga il Lamb-shift. Ed inoltre ci interessa di aver confermato il risultato del nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾; in tale lavoro dal fatto che se il campo di radiazione viene trattato classicamente non si ha il Lamb-shift deducemmo indirettamente che tale Lamb-shift doveva essere una conseguenza delle fluttuazioni del campo elettromagnetico in accordo con il lavoro di WELTON ⁽¹²⁾. Qui, mediante la trasformazione canonica (12), abbiamo mostrato direttamente come il Lamb-shift sia una conseguenza delle fluttuazioni. Come abbiamo già detto il primo termine a secondo membro della (17), responsabile del Lamb-shift, non compariva nel nostro calcolo in quanto, essendo il calcolo classico avevamo potuto porre i $q_k = 0$ fin dal principio.

4. - Conclusione.

Facendo uso di una hamiltoniana che presenta certe restrizioni ma che tuttavia nel caso non relativistico contiene le principali caratteristiche dell'hamiltoniana corretta, abbiamo mostrato come sussista tra le derivate seconda e terza del valore medio di \mathbf{x} e il valor medio di $\partial V/\partial \mathbf{x}$ una relazione che è la corrispondente dell'equazione di Dirac-Eliezer. Nel caso particolare dell'oscillatore armonico il valor medio di \mathbf{x} obbedisce proprio alla (ossia varia col tempo proprio secondo la) equazione di D-E. Quindi possiamo enunciare il risultato: la soluzione esatta (cioè indipendente dall'uso della teoria delle perturbazioni) del problema di elettrodinamica quantistica: determinare

⁽¹¹⁾ T. A. WELTON: *Phys. Rev.*, **74**, 1157 (1948).

⁽¹²⁾ Si tagli naturalmente un a un certo k_{\max} . Si tenga anche presente che m_0 nel secondo membro della (17) può essere sostituito con m a meno di termini di ordine superiore in e^2 .

la variazione col tempo del valor medio della posizione di un oscillatore armonico in interazione col proprio campo, si riconduce alla risoluzione esatta (cioè senza far uso della teoria delle perturbazioni) dell'equazione di Dirac-Eliezer.

Quindi, per lo meno nel caso di un oscillatore armonico, l'idea ⁽²⁾ che la introduzione della costante di Planck possa togliere le difficoltà dell'elettrodinamica classica non sembra corretta.

Una indagine approfondita del problema delle soluzioni fisiche e non fisiche dell'equazione di D-E diventa assolutamente necessaria. Nel caso dell'oscillatore armonico esiste, come è ben noto, una soluzione fisica dell'equazione di D-E. Questa soluzione fisica è probabilmente la soluzione alla quale tende la soluzione perturbativa. Comunque, per quanto sappiamo, ci sembra il presente il primo caso nel quale, sia pure partendo da una hamiltoniana di validità limitata, si conosce la soluzione esatta (cioè indipendente della teoria delle perturbazioni) di un problema di elettrodinamica quantistica.

Si noti a questo proposito che l'hamiltoniana di Bloch-Nordsiek è *assai* più limitata di quella di cui abbiamo fatto uso in quanto non contiene il termine in A^2 e non consente quindi il fenomeno della diffusione.

APPENDICE I.

Dalla (5) integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}
 (1)_A \quad \dot{q}_k(t) &= \frac{ec}{V^{1/2}} \int_{t_0}^t (\mathbf{e}_k \cdot \dot{\mathbf{x}}(s)) \cos kc(s-t) ds = \\
 &= \frac{e}{kV^{1/2}} (\mathbf{e}_k \cdot \dot{\mathbf{x}}(s)) \sin kc(s-t) \Big|_{t_0}^t - \frac{e}{kV^{1/2}} \int_{t_0}^t (\mathbf{e}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}(s)) \sin kc(s-t) ds = \\
 &= \frac{e}{kV^{1/2}} (\mathbf{e}_k \cdot \dot{\mathbf{x}}(s)) \sin kc(s-t) \Big|_{t_0}^t + \frac{e}{kV^{1/2}} \frac{1}{kc} (\mathbf{e}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}(s)) \cos kc(s-t) \Big|_{t_0}^t - \\
 &- \frac{e}{kV^{1/2}} \frac{1}{kc} \int_{t_0}^t (\mathbf{e}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}(s)) \cos kc(s-t) ds,
 \end{aligned}$$

conseguentemente l'espressione $-(e/c)(1/V^{1/2}) \sum_k \mathbf{e}_k \dot{q}_k$ risulta somma di tre termini; il primo si annulla se poniamo $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0$; il secondo vale:

$$-\frac{1}{V} \sum_k \frac{e^2}{k^2 c^2} \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t)) = m_{en} \ddot{\mathbf{x}}(t) \quad \left[\frac{1}{V} \sum_k \rightarrow \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3k \right],$$

dato che il contributo dell'estremo inferiore è nullo come si vede facilmente; il terzo è:

$$\begin{aligned}
 (2)_A \quad & + \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^2}{k^2 c^2} \mathbf{e}_k \int_{t_0}^t (\mathbf{e}_k \cdot \ddot{\mathbf{x}}(s)) \cos kc(s-t) ds = \\
 & = \frac{e^2}{3\pi^2 c^2} \int_0^\infty dk \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{x}}(s) \cos kc(s-t) ds = \frac{e^2}{3\pi^2 c^2} \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{x}}(s) \frac{\sin k_0 c(s-t)}{c(s-t)} ds = \\
 & = \frac{e^2}{3\pi^2 c^3} \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{-c(t-t_0)}^0 \ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{u}{c} + t\right) \frac{\sin k_0 u}{u} du = \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\mathbf{x}}(t).
 \end{aligned}$$

Onde segue la (7). Si noti che se $(t - t_0) \rightarrow \infty$ questo ultimo passaggio è permesso solo se $\ddot{\mathbf{x}}$ come funzione di t tende a zero in modo conveniente per $t \rightarrow \infty$. Questa osservazione può essere utile nella discussione del problema delle soluzioni fisiche.

APPENDICE II.

Il valor medio del primo termine della (17) in uno stato in cui l'oscillatore armonico ha energia determinata e non si hanno fotoni vale:

$$\begin{aligned}
 (3)_A \quad \Delta E &= \frac{1}{2} \frac{e}{m^2 c^2} \frac{1}{V} \sum_k \frac{\sigma}{k^2 c^2 - \sigma/m} \frac{\hbar c}{2k} = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \sigma \int_0^{ck_{\max}} \frac{c^2 k}{k^2 c^2 - (\sigma/m)} dk = \\
 &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \sigma \log \frac{\hbar c k_{\max}}{\hbar \sqrt{\sigma/m}},
 \end{aligned}$$

come si vede ΔE è eguale per tutti gli stati dell'oscillatore armonico. Lo stesso risultato si ha naturalmente dalla formula (5) del lavoro di BETHE ⁽¹³⁾.

Indicato con n il numero quantico di un generico stato dell'oscillatore armonico, facendo uso delle notazioni di Bethe e in più posto $b = \sqrt[4]{\sigma m \hbar^2}$, tenuto

⁽¹³⁾ H. A. BETHE: *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).

presente un fattore 4π dipendente dalle diverse unità, la formula (5) di Bethe dà:

$$\begin{aligned}
 (4)_A \quad \Delta E &= \frac{e^2}{6\pi^2 m^2 \hbar c^3} \int_0^{\hbar ck_{\max}} d\hbar ck \sum_s \frac{|\mathbf{v}_{ns}|^2 (E_s - E_n)}{E_s - E_n + \hbar ck} = \\
 &= \frac{e^2}{12\pi^2 \hbar c^3 m^2} \cdot \int_0^{\hbar ck_{\max}} d\hbar ck \left[\frac{b^2 n \hbar \sqrt{\sigma/m}}{-\hbar \sqrt{\sigma/m} + \hbar ck} + \frac{b^2 (n+1) \hbar \sqrt{\sigma/m}}{\hbar \sqrt{\sigma/m} + \hbar ck} \right] \\
 &= \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \sigma \int_0^{ck_{\max}} \frac{c^2 k dk}{c^2 k^2 - (\sigma/m)} + \text{termine che} \rightarrow 0 \text{ al tendere di} \\
 &\quad k_{\max} \text{ a } \infty.
 \end{aligned}$$

La (4)_A coincide con la (3)_A.

SUMMARY

We show that in the non-relativistic case and in dipole approximation a complete correspondence exists between the classical Dirac-Eliezer equation for a point electron and the equation which, in quantum electrodynamics governs the variation with time of the expectation value of the position of the electron. For an harmonic oscillator the correspondence is so close that the expectation value of the position of the oscillator satisfies just the Dirac-Eliezer equation. As a consequence of this we have the result that, at least for an harmonic oscillator, the introduction of Planck's constant cannot solve the difficulties of the physical and non physical solutions of the Dirac-Eliezer equation. Moreover, in the variation with time of the mentioned expectation value, we have (naturally under the mentioned limitations) an example of resolution of a problem of quantum electrodynamics completely independent from perturbation-theory.

Interferometria ultrasonora nei gas (III). Velocità e assorbimento di ultrasuoni nell'anidride solforosa.

S. PETRALIA

Istituto di Fisica dell'Università - Bologna

(ricevuto il 4 Luglio 1952)

Riassunto. — Si sono misurati la velocità di propagazione e l'assorbimento di ultrasuoni, di varie frequenze, nell'anidride solforosa. Vengono calcolati il calore specifico molecolare C_i dovuto alle oscillazioni interne delle molecole, il tempo di rilassamento τ dell'energia di oscillazione e la probabilità P_{10} di diseccitazione degli stati di oscillazione. Risulta $C_i = 1,476$ cal/mole, $\tau = 1,85 \cdot 10^{-7}$ s e $P_{10} = 0,54 \cdot 10^{-3}$.

1. — Mentre esistono numerose ricerche sulla dispersione della velocità di propagazione e sull'assorbimento del suono, di origine molecolare, nell'anidride carbonica, poche e incomplete ricerche sono state fatte, in tal senso, sull'anidride solforosa. Per questa sostanza sono stati determinati alcuni punti della curva di dispersione da parte di W. T. RICHARDS e J. A. REID ⁽¹⁾ e dei punti della curva di assorbimento da parte di E. GROSSMANN ⁽²⁾ e più recentemente da E. F. FRICKE ⁽³⁾. Si tratta in ogni caso di determinazioni fatte a frequenze sonore basse. Col metodo cosiddetto delle impurità, ideato da KNUDSEN, FRICKE prevede un massimo di assorbimento per l'anidride solforosa a una frequenza ultrasonora di 1040 kHz, per cui la ragione di dispersione e d'assorbimento molecolare per questa sostanza deve estendersi verso le frequenze ultrasonore elevate.

Può quindi essere interessante completare la curva di dispersione della velocità per valori della frequenza ultrasonora, o del rapporto f/p tra la fre-

⁽¹⁾ W. T. RICHARDS e J. A. REID: *Journ. Chem. Phys.*, **2**, 193 (1934).

⁽²⁾ E. GROSSMANN: *Ann. d. Phys.*, **15**, 681 (1932).

⁽³⁾ E. F. FRICKE: *Journ. Acoust. Soc. Amer.*, **12**, 245 (1940).

quenza f e la pressione p del gas, tali da raggiungere il valore limite della velocità V_∞ per frequenza infinita, e allo stesso tempo confermare l'andamento teorico dalla curva di assorbimento costruita da FRICKE. Ho eseguito pertanto misure di velocità e di assorbimento su questa sostanza, servendomi di un interferometro ultrasonoro, già da me ⁽⁴⁾ descritto.

Come sorgenti ultrasonore ho usato dei cristalli di quarzo oscillanti sulle frequenze di 166 e 1 400 kHz. Il gas veniva preparato per azione di acido solforico su mercurio a temperatura elevata, veniva quindi condotto su anidride fosforica, poi liquefatto e distillato più volte. Dal refrigerante veniva immesso nell'apparecchio a pressione di una atmosfera. Nelle misure la pressione del gas nell'interferometro poteva essere ridotta convenientemente, onde ottenere diversi valori del rapporto f/p . La temperatura del gas veniva tenuta costante, a 20 °C.

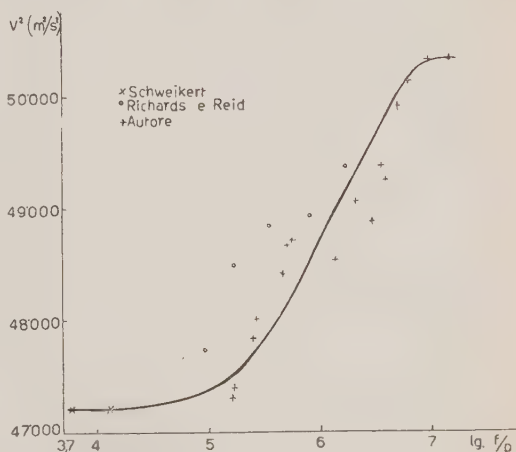


Fig. 1.

Alcune delle numerose determinazioni eseguite di velocità di propagazione sono raccolte nella tabella I, mentre nella fig. 1 è segnata la curva $V^2(\log f/p)$. Per quanto si sia curata la preparazione del gas, onde ottenerlo puro in ogni esperimento, pure da una serie di misure all'altra si ha una notevole variazione nei risultati, e i valori di V^2 determinati con la sorgente di frequenza più bassa sembrano stare su una curva diversa da quella che potrebbe riunire i punti che danno V^2 , ottenuti con la sorgente di frequenza maggiore. Nel grafico sono anche segnati dei punti dedotti dalle misure di RICHARDS e REID e due punti dedotti dalle determinazioni fatte da G. SCHWEIKERT ⁽⁵⁾ alle frequenze di 5 920 e 13 062 Hz. Quest'ultimo autore dà per la velocità del suono nell'anidride solforosa a 0 °C il valore 209,4 m/s. Da tale valore si è ottenuta la velocità a 20 °C, tenendo conto che la velocità di propagazione del suono in un gas reale può essere espressa, in funzione della temperatura, da un'equazione

⁽⁴⁾ S. PETRALIA: *Nuovo Cimento*, **9**, 351 (1952).

⁽⁵⁾ G. SCHWEIKERT: *Ann. d. Phys.*, **48**, 593 (1915).

del tipo

$$(1) \quad V^2 = \frac{RTg}{M} \left(1 + \frac{Rd}{c} \right),$$

dove g e d sono fattori di correzione dipendenti dalla temperatura e dalle costanti di van der Waals, a e b . Tale equazione è quella proposta dalla scuola di W. H. PIELEMEIER ⁽⁶⁾. Trascurando l'influenza della temperatura sul termine di correzione d , risulta per la velocità V_0 , a bassa frequenza e per la

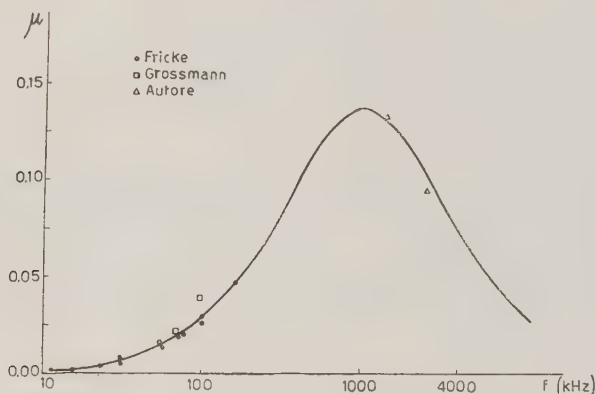


Fig. 2.

temperatura di 20 °C, $V_0 = 217,3$ m/s, mentre sembra possa assumersi, secondo le mie misure, come velocità limite per frequenze elevate e per la temperatura di 20 °C il valore $V_\infty = 224,3$ m/s.

Il coefficiente di assorbimento dell'energia ultrasonora per lunghezza d'onda, μ , è stato determinato seguendo il procedimento indicato da PIELEMEIER ⁽⁷⁾. I valori ottenuti mostrano scarti notevoli da una serie di misure all'altra; si è ritenuto di conservare, come abbastanza probativi i risultati di misure fatte su un campione di gas, per f/p uguale a 1400 e 2560 kHz/atm. È $\mu_{1400} = 0,132$ e $\mu_{2560} = 0,094$. Tali valori si inquadrano abbastanza bene sulla curva di Fricke, riprodotta in fig. 2, insieme con le determinazioni di questo Autore e quelle di GROSSMANN.

Secondo un computo recente di J. J. MARKHAM, R. T. BEYER e R. B.

⁽⁶⁾ W. H. PIELEMEIER, H. L. SAXTON e D. TELFAIR: *Journ. Chem. Phys.*, **8** 106 (1940).

⁽⁷⁾ W. H. PIELEMEIER: *Phys. Rev.*, **34**, 1184 (1929); **41**, 833 (1932).

LINDSAY⁽⁸⁾, il coefficiente d'assorbimento classico dell'ampiezza sonora nell'anidride solforosa a 20 °C e a pressione atmosferica vale $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-13} f^2 \text{ cm}^{-1}$ e quindi per il coefficiente d'assorbimento classico dell'energia sonora per lunghezza d'onda, μ_{cl} , si ricava $\mu_{cl} = 2\alpha\lambda = 2,74fV \cdot 10^{-13}$.

Frequenza (kHz)	$\log f/p$	V (m/s)	Frequenza (kHz)	$\log f/p$	V (m/s)
166	5,213	217,5	1400	6,143	220,3
	5,222	217,7		6,324	221,5
	5,398	218,7		6,470	221,1
	5,428	219,1		6,547	222,2
	5,665	220,0		6,595	221,9
	5,710	220,6		6,700	223,4
	5,747	220,7		6,801	223,9
				6,965	224,4
				7,151	224,3

Per $f = 1400 \text{ kHz}$ risulta $\mu_{1400cl} = 0,008$ e per $f = 2560 \text{ kHz}$ risulta $\mu_{2560cl} = 0,015$, valori questi molto inferiori a quelli determinati sperimentalmente; l'assorbimento è perciò qui prevalentemente di origine molecolare.

2. — Come è ben noto, l'esistenza di una banda di dispersione ultrasonora, che per l'anidride solforosa risulta sia dalle misure di velocità che dalle misure di assorbimento, è conseguenza della lentezza con cui avvengono gli scambi di energia tra i gradi di libertà di traslazione e i gradi di libertà interni di oscillazione delle molecole del gas. Secondo le recenti tabelle di A. EUCKEN e K. H. HELLWEGE⁽⁹⁾ le oscillazioni fondamentali delle molecole dell'anidride solforosa hanno i numeri d'onda $1151,2 \text{ cm}^{-1}$; 1361 cm^{-1} ; 520 cm^{-1} . Il corrispondente calore specifico a volume costante per grammolecola alla temperatura di 20 °C, nell'ipotesi che tutte e tre le oscillazioni siano eccitate a questa temperatura, è dato da

$$(2) \quad C_i = R \left\{ F \left(\frac{1655,8}{293,1} \right) + F \left(\frac{1957,6}{293,1} \right) + F \left(\frac{747,9}{293,1} \right) \right\},$$

ove $F(x)$ è la funzione di Einstein. Il contributo più importante a C_i è certamente dato dal terzo termine della (2). Si trova $C_i = 1,525 \text{ cal/mole}$. Ora C_i non influisce più sul valore del calore specifico per grammolecola della so-

⁽⁸⁾ J. J. MARKHAM, R. T. BEYER e R. B. LINDSAY: *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 353 (1951).

⁽⁹⁾ A. EUCKEN e K. H. HELLWEGE: *Atom. und Molekularphysik*, **2**, Molekeln I. (Berlin, 1951), p. 335.

stanza, quando questo viene determinato da misure di velocità sonora fatte a frequenze opportunamente elevate. Introducendo nella (1) i valori della velocità di propagazione V_0 e V_∞ , si ottiene per i calori specifici molecolari a volume costante C_0 e C_∞

$$C_0 = 7,611 \text{ cal/mole}, \quad C_\infty = 6,135 \text{ cal/mole},$$

e perciò $C_i = C_0 - C_\infty = 1,476 \text{ cal/mole}$, che è prossimo al valore determinato per via spettroscopica. FRICKE, basandosi sui dati spettroscopici di BADGER e BONNER per l'anidride solforosa, calcola per la temperatura di 23°C , $C_0 = 7,524 \text{ cal/mole}$, $C_\infty = 6,108 \text{ cal/mole}$ e $C_i = 1,416 \text{ cal/mole}$; viene fatta l'ipotesi che solo le due oscillazioni fondamentali più basse della molecola SO_2 siano attive a quella temperatura.

Per il calcolo del tempo di rilassamento τ caratteristico dei processi di eccitazione e diseccitazione per urto degli stati di oscillazione delle molecole, la teoria fornisce varie espressioni, per vero dedotte nell'ipotesi che il gas si possa considerare perfetto. Si ha

$$(3) \quad \tau = \frac{1}{2\pi(f/p)_\omega} \frac{C_0}{C_\infty} = \frac{1}{2\pi(f/p)_m} \sqrt{\frac{(C_0 + R)C_0}{(C_\infty + R)C_\infty}},$$

dove $(f/p)_\omega$ rappresenta l'ascissa per la quale la curva $V^2 = V^2(f/p)$ presenta un punto di flesso, mentre $(f/p)_m$ rappresenta l'ascissa per la quale la curva che dà il coefficiente d'assorbimento molecolare per lunghezza d'onda, $\mu = \mu(f/p)$, ha un massimo. Le frequenze ultrasonore corrispondenti sono legate dalla relazione

$$(4) \quad f_m = \frac{V_0}{V_\infty} f_\omega.$$

La determinazione di $(f/p)_\omega$ nel grafico di fig. 1 soffre naturalmente dell'incertezza con la quale tale grafico è stato segnato. Si può assumere $(f/p)_\omega = 1070 \text{ kHz/atm}$; dalla (4) risulta allora per la frequenza di massimo assorbimento $(f/p)_m = 1036 \text{ kHz/atm}$, che praticamente coincide con la frequenza prevista da FRICKE, e cioè 1040 kHz . Secondo la prima espressione di (3) il tempo di rilassamento vale $\tau = 1,84 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, mentre per la seconda espressione di (3) alla frequenza di massimo assorbimento è $\tau = 1,86 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. FRICKE dà per τ il valore $1,81 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. Pertanto l'accordo tra le determinazioni di FRICKE e quelle da me fatte può dirsi soddisfacente.

Secondo la teoria della dispersione ultrasonora, il tempo di rilassamento τ

(10) P. VIGOREUX: *Ultrasonics* (London, 1950), p. 40.

può essere ancora calcolato, per ogni frequenza ultrasonora, dal coefficiente di assorbimento per lunghezza d'onda, determinato per quella frequenza. È

$$(5) \quad \mu_{\text{mol}} = \mu_{\text{sp}} - \mu_{\text{cl}} = \frac{2\pi(Q^2 - 1)n}{1 + Q^2 n^2}$$

con

$$Q^2 = \frac{1 + \frac{R}{C_\infty}}{1 + \frac{R}{C_0}}, \quad n = 2\pi f \tau \frac{C_\infty}{C_0}.$$

Il coefficiente d'assorbimento per lunghezza d'onda molecolare μ_{mol} si ottiene manifestamente dal valore di μ_{sp} determinato sperimentalmente dal quale si sottragga il valore di μ_{cl} classicamente calcolato. Per la frequenza di 1400 kHz dalla (5) si ottiene $\tau = 2,6 \cdot 10^{-7}$ s; alla frequenza di 138 kHz, coi dati di FRICKE, quali si possono ricavare dalla curva di fig. 2, risulta $\tau = 2,3 \cdot 10^{-7}$ s.

Il coefficiente di massimo assorbimento molecolare

$$(6) \quad \mu_{m\text{mol}} = \frac{\pi R C_0}{\sqrt{C_0(C_0 + R)} C_\infty (C_\infty + R)}$$

vale 0,152, mentre secondo FRICKE è $\mu_{m\text{mol}} = 0,148$.

Possiamo ancora calcolare il numero di collisioni Z_{10} che devono aver luogo perchè un quanto di oscillazione si tramuti in energia di traslazione molecolare, e la probabilità P_{10} che una molecola perda per urto la sua energia di oscillazione. Secondo la definizione di τ , è

$$(7) \quad \tau = \frac{1}{K_{01} + K_{10}}, \quad \frac{K_{01}}{K_{10}} = \exp \left[- \frac{E_i}{RT} \right] = \exp \left[- \frac{\theta}{T} \right],$$

dove K_{01} e K_{10} stanno a indicare, rispettivamente, il numero di volte che nell'unità di tempo si eccita un quanto di energia di oscillazione a spese dell'energia di traslazione o viceversa il quanto di oscillazione si tramuta in energia di traslazione, e la temperatura θ è definita dalla relazione $k\theta = h c \nu$, con k costante di Boltzmann, h costante di Planck, c velocità della luce e ν numero d'onda.

Dalle (7) si ottiene

$$(8) \quad K_{10} = \tau^{-1} \left(1 + \exp \left[- \frac{\theta}{T} \right] \right).$$

Per la frequenza dell'oscillazione fondamentale di deformazione della mole-

cola di SO_2 , di numero d'onda 520 cm^{-1} , si ha allora $K_{10} = 0,5 \cdot 10^7$. Ora è

$$(9) \quad Z_{10} = \frac{1}{P_{10}} = \frac{N}{K_{10}},$$

e qui N esprime il numero di urti che una molecola subisce in media in un secondo. Prendendo per diametro delle molecole il valore dato da FRICKE, cioè $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, risulta a 20°C e a pressione normale, $N = 9,17 \cdot 10^9$ urti per cm^2 e per secondo. Corrispondentemente abbiamo

$$Z_{10} = 1830, \quad P_{10} = 0,54 \cdot 10^{-3}.$$

L'Autore ringrazia il prof. G. VALLE per l'interesse con cui ha seguito questa ricerca.

SUMMARY (*)

The propagation velocity and the absorption of supersonic waves of different frequencies in sulphur dioxide have been measured. The molecular heat capacity C_i due to the internal vibrations of the molecules, the relaxation time τ of the vibration energy and the probability P_{10} of disexcitation of the vibration states are calculated. The A. finds $C_1 = 1.476 \text{ cal/mole}$, $\tau = 1,85 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ and $P_{10} = 0.54 \cdot 10^{-3}$.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Sulla probabilità di localizzazione degli elettroni negli sciami estesi.

G. POIANI e C. VILLI

Istituto di Fisica dell'Università - Trieste

(ricevuto il 10 Luglio 1952)

Riassunto. — Viene studiata la distribuzione degli sciami estesi nell'aria applicando la teoria della cascata della componente elettrofotonica sviluppata dal gruppo di Padova. Si trova che la probabilità che un elettrone venga localizzato nell'anello x' , $x' + dx'$ è $\mathcal{P}(x') dx' = 0,153(dx'/x'^3)$, in cui x' è misurato in unità Molière. Questo risultato viene confrontato con quelli previsti da altre teorie.

1. — È noto che MOLIERE⁽¹⁾ ha ricavato una espressione del tipo $\mathcal{P}(x') dx' = 0,1(dx'/x'^3)$ per la probabilità che un elettrone venga rivelato alla distanza (x', dx') dall'asse dello sciame, essendo x' misurato in unità $x' = (E_c/\beta)x$. Sulla base di questa relazione, valida per distanze relativamente grandi, è possibile prevedere, in discreto accordo con l'esperienza, il numero di coincidenze che si ottengono con contatori posti a distanze variabili tra venti e centocinquanta metri, mentre per distanze superiori, aggiranti attorno ai trecento metri, il numero di coincidenze previsto è inferiore a quello sperimentalmente registrato.

Questo fatto denota che il calcolo del coefficiente numerico della anzidetta probabilità differenziale è stato fondato su di una schematizzazione fisica del problema che limita lo sviluppo laterale della cascata e può essere, almeno parzialmente, imputato all'approssimazione di Arley, usata da MOLIERE, la quale, trascurando i processi radiativi sotto l'energia critica, conduce ad un numero troppo piccolo di elettroni di bassa energia, che sono principalmente responsabili dell'allargamento dello sciame.

(¹) G. MOLIERE: *Cosmic Radiation* (Heisemberg, 1946), p. 26.

Un calcolo più dettagliato è stato successivamente eseguito da EYGES⁽²⁾ supponendo che la distribuzione radiale, mediata su tutto lo sviluppo longitudinale dello sciame, costituisca una accettabile approssimazione della distribuzione radiale in ogni punto, tranne che in prossimità dell'origine e della coda. Il calcolo, fondato sulle espressioni della traccia elettronica e della larghezza media quadratica date da BELENKY⁽³⁾ e valide anche al di sotto dell'energia critica, conduce per il coefficiente di Molière al valore 0,162. Questo risultato deve, però, essere accolto con qualche riserva, perchè il procedimento adottato da EYGES tiene conto della variabilità delle sezioni d'urto relative ai processi Compton e radiativi non in modo sistematico, bensì come correzione sui risultati numerici ottenuti usando la sezione d'urto asintotica, il che comporta una valutazione troppo approssimata degli effetti, opposti sui risultati finali del calcolo, di detti processi nella zona delle energie molto basse.

Scopo di questo lavoro è il calcolo del coefficiente di Molière applicando la teoria della cascata elettrofotonica sviluppata dal gruppo di Padova^(4,5,6), la quale consente di impiegare, nel modo più semplice e diretto, gli usuali procedimenti matematici fondati sulla trasformazione di Laplace.

Il calcolo verrà eseguito sulla base delle due seguenti ipotesi:

a) che le perdite di energia al di sopra di $\varepsilon' = 161$ MeV (limite inferiore di validità della sezione d'urto asintotica relativa al processo di bremsstrahlung) siano dovute esclusivamente ad irraggiamento con sezione d'urto costante e al di sotto esclusivamente alla ionizzazione;

b) che il processo di produzione delle coppie si arresti all'energia $\eta_0 = 631$ MeV (limite inferiore di validità della sezione d'urto asintotica relativa al processo di formazione di coppie).

Queste due ipotesi sono accettabili sin tanto che si considera l'aria come sede dello sciame a causa della elevata perdita per ionizzazione ($\beta = 98$ MeV), di poco inferiore al valore limite ε' . In particolare, l'ipotesi b) equivale ad ammettere che alla quota variabile t' i primari elettronici o posseggono una energia sufficiente per produrre particelle rivelabili alla quota t , ed allora vengono diffusi entro l'angolo massimo $\theta_{\max} = (66 \cdot 10^6/E)$, oppure, in caso contrario, vengono assorbiti per ionizzazione nelle regioni periferiche dello sciame senza contribuire in modo rilevante al processo moltiplicativo della cascata nella successiva unità di radiazione.

È possibile in tale modo ricondurre il calcolo del coefficiente di Molière a quello dello sparpagliamento medio quadratico, mediato sullo sviluppo longitudinale dello sciame, dei $\Pi(E_0, 0, t)$ elettroni che supporremo rappresentati

(²) L. EYGES: *Phys. Rev.*, **74**, 1801 (1948).

(³) S. BELENKY: *Journ. Phys. USSR*, **8**, 305 (1944).

(⁴) N. DALLAPORTA e E. CLEMENTEL: *Nuovo Cimento*, **3**, 235 (1946).

(⁵) N. DALLAPORTA e G. POIANI: *Nuovo Cimento*, **4**, 1 (1947).

dello spettro integrale di CLEMENTEL ⁽⁶⁾ e generati da $\pi(E_0, E, t)$ primari di energia $E \geq \eta_0$ (spettro elettronico differenziale di ROSSI-GREISEN) ⁽⁷⁾.

Tenendo conto dell'ipotesi b), si può prevedere che il valore numerico del coefficiente della probabilità differenziale, calcolato secondo questi presupposti, risulterà approssimato per difetto rispetto al valore vero.

2. - La probabilità che un elettrone di energia E venga diffuso entro l'angolo solido $2\pi \sin \theta d\theta$ nel percorrere la distanza dt' espressa in unità di radiazione, è, tenendo conto dell'ipotesi b) ($\sin \theta \sim \theta$; $1 - \cos \theta \sim \theta^2/4$)

$$d\xi = \alpha(Z) \left(\frac{E_c}{E} \right)^2 dt \frac{d\theta}{\theta^3},$$

in cui $\alpha(Z) = [2 \cdot \ln(183 \cdot Z^{-1/3})]^{-1}$ e $E_c = 21$ MeV è l'energia caratteristica di scattering. Seguendo il procedimento di NORDHEIM ⁽⁸⁾, si trova che il numero totale di elettroni di energia maggiore di zero, generati da primari di energia $E \geq \eta_0$ e localizzati alla distanza (x, dx) dall'asse dello sciame è:

$$(1) \quad N(E_0, 0) = \alpha(Z) E_c^2 \int_{\eta_0}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt \int_{\eta_0}^{E_0} \frac{dE'}{E'^2} \int_0^t \pi(E_0, E', t') \overline{\Pi}(E', 0, t-t')(t-t')^2 dt'.$$

Siccome il numero totale di essi che possiede energia $E > 0$ è espresso dalla traccia integrale:

$$(2) \quad F(E_0, 0) = \int_0^{\infty} \overline{\Pi}(E_0, 0, t) dt,$$

risulta che la probabilità differenziale che un elettrone venga localizzato nell'anello circolare (x, dx) è:

$$(3) \quad \mathcal{P}(x) dx = \frac{N(E_0, 0)}{F(E_0, 0)} = M \frac{dx}{x^3},$$

in cui

$$(4) \quad M = \frac{\alpha(Z) E_c^2}{F(E_0, 0)} \int_0^{\infty} dt \int_{\eta_0}^{E_0} \frac{dE'}{E'^2} \int_0^t \pi(E_0, E', t') \overline{\Pi}(E', 0, t-t')(t-t')^2 dt'.$$

⁽⁶⁾ E. CLEMENTEL e L. FABBRICHESI: *Nuovo Cimento*, **5**, 78 (1947).

⁽⁷⁾ B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

⁽⁸⁾ J. NISHIMURA e K. KAMATA: *Progr. of Theor. Phys.*, **6**, 628 (1951).

Tenendo conto che lo sparpagliamento quadratico medio è:

$$(5) \quad \overline{H}(E_0, 0, t) \langle R^2(0, t) \rangle = E_0^2 \int_{\eta_0}^{E_0} \frac{dE'}{E'^2} \int_0^t \pi(E_0, E', t) \overline{H}(E', 0, t-t')(t-t')^2 dt',$$

dalla (4) si ricava, dopo aver integrato la (5) sulla quota,

$$(6) \quad M = \alpha(z) \langle \overline{R^2(0)} \rangle,$$

in cui $\langle \overline{R^2(0)} \rangle$ è lo sparpagliamento medio quadratico di tutti gli elettroni di energia $E \geq 0$, mediato sullo sviluppo longitudinale dello sciame.

3. - Applicando il teorema della Faltung, la L -trasformata della (5) risulta

$$(7) \quad \int_0^\infty \exp[-\lambda t] \langle R^2(0, t) \rangle \overline{H}(E_0, 0, t) dt = \\ = \mathcal{L} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\langle \int_{\eta_0}^{E_0} L_\pi(E_0, E', \lambda) \frac{\partial^2 L_{\overline{H}}(E_0, 0, \lambda)}{\partial \lambda^2} \frac{dE'}{E'^2} \right\rangle \right],$$

in cui \mathcal{L} e λ sono, rispettivamente, il simbolo operatorio e il parametro di trasformazione, L_π e $L_{\overline{H}}$ sono le L -trasformate dello spettro differenziale di Rossi-Greisen di alta energia e di quello integrale di Clementel. Per $\lambda = 0$ ($s=1$) il primo membro della (7) si identifica con il primo membro della (5) integrato sulla quota e, quindi, essendo il prodotto dei due operatori \mathcal{L} e \mathcal{L}^{-1} uguale all'operatore unità, la (6) diviene:

$$(8) \quad M = \frac{\alpha(Z)}{F(E_0, 0)} \int_{\eta_0}^{E_0} L_\pi(E_0, E', 0) \left[\frac{\partial^2 L_{\overline{H}}(E', 0, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right]_{\lambda=0} \frac{dE'}{E'^2}.$$

Per il calcolo della (8) è necessario considerare il fatto che, quando gli elettroni che alimentano il processo moltiplicativo alle quote inferiori hanno alla quota intermedia t' un'energia che è uguale o prossima al limite inferiore η_0 , l'approssimazione implicita nell'aver sviluppato la teoria verticale della cascata in base agli spettri differenziali incompleti di approssimazione « A » [$L_\pi(E_0, E, \lambda) = -(H(s)E_0^s/\lambda_1'(s)E^{s+1})$ e $L_\nu(E_0, W, \lambda) = -(L(s)E_0^s/s \cdot \lambda_2'(s) \cdot W^{s+1})$], diviene molto difettosa perchè le loro espressioni complete:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} L_\pi(E_0, E, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds; \\ L_\nu(E_0, W, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i W} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{s} \frac{C(s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{W}\right)^s ds, \end{aligned} \right.$$

risentono dei contributi non solo dei poli sull'asse reale positivo, proporzionali a $(E_0/E)^s$, ma anche di quelli esistenti nel semipiano negativo, dato che, a causa del processo moltiplicativo rappresentato dal secondo membro della (1), la condizione $E_0 \gg E$, che rende trascurabile l'effetto dei secondi rispetto a quello dovuto ai primi, non è più verificata.

Di questa circostanza analitica, strettamente connessa al fatto fisico che col progredire del processo moltiplicativo verso le basse energie e le quote inferiori, gli elettroni generatori coesistono in bande energetiche che sono sempre più contigue a quelle degli elettroni generati, si può tener conto risolvendo le espressioni della teoria verticale ^(4,5):

$$[\lambda + A(s)]L_{\pi}(E_0, E, \lambda) = 2 \int_0^{E/\eta_0} L_{\gamma}\left(E_0, \frac{E}{\mu}, \lambda\right) \psi_0(u) \frac{du}{u},$$

$$[\lambda + \sigma(W) + \chi(W)]L_{\gamma}(E_0, W, \lambda) = \int_0^{W/\varepsilon} L_{\pi}\left(E_0, \frac{W}{v}, \lambda\right) \Phi_0(v) \frac{dv}{v},$$

dopo aver sostituito le (9) in luogo delle L_{π} e L_{γ} incomplete. Conseguentemente si trova che le L -trasformate dei quattro termini dello spettro di Clementel sono:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{\overline{II}}(E_0, 0, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{s} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} M(\lambda, s) \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^s ds, \\ L_{\overline{II}_1}(E_0, 0, \lambda) &= \frac{1}{i\pi[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} s \frac{C(s)f(0, \eta_0, s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^s ds \\ &= \frac{1}{i\pi[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} N(\lambda, s) \left(\frac{E_0}{\eta_0}\right)^s ds, \\ L_{\overline{II}_1'}(E_0, 0, \lambda) &= \frac{1}{i\pi\eta_0[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(\sigma_0 + \lambda)p(0, \lambda, s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{\varepsilon'}\right)^s ds \\ &= \frac{1}{i\pi\eta_0[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} P(\lambda, s) \left(\frac{E_0}{\varepsilon'}\right)^s ds, \\ L_{\overline{II}_1''}(E_0, 0, \lambda) &= \frac{1}{i\pi\eta_0[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(\sigma_0 + \lambda)q(0, \lambda, s)}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \left(\frac{E_0}{\varepsilon'}\right)^s ds \\ &= \frac{1}{i\pi\eta_0[\lambda + A(s)]} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} Q(\lambda, s) \left(\frac{E_0}{\varepsilon'}\right)^s ds, \end{aligned} \right.$$

in cui nella quarta delle precedenti relazioni la funzione $q(0, \lambda, s)$ tiene conto dell'effetto dovuto alla ionizzazione.

Il calcolo dell'integrale che compare nella (8) si scinde in quattro integrazioni distinte del tipo:

$$(11) \quad I_k = - \frac{H(1)}{\lambda'_1(1)} \frac{E_0 E_c^2}{2\pi i} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\frac{1}{\lambda + A(s)} \int_{-\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\Phi_k(\lambda, r)}{\gamma_k} dr \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{dE'}{E'^{s+3-r}} \right]_{\lambda=0} \quad (k=1, 2, 3, 4),$$

in cui si è posto per $L_\pi(E_0, E, \lambda)$ l'espressione approssimata di Rossi-Greisen dato che il termine $1/E'^2$ contribuisce a rendere trascurabile l'effetto dei poli del semipiano negativo. La funzione $\Phi_k(\lambda, r)$ è una qualsiasi delle funzioni M, N, P, Q , che compaiono nelle (10) e γ si identifica, a seconda dei casi, con η_0 oppure ε' . Siccome quando $E_0 \gg E$ le sezioni d'urto assumono il loro valore asintotico costante, è da ritenere che porre $E_0 \sim \infty$ nell'estremo superiore di integrazione non alteri in modo rilevante il calcolo; con questa posizione è possibile risolvere l'integrale in campo complesso applicando il teorema dei residui nel polo $s+2-r=0$; fissato dall'integrazione sull'energia.

Esprimendo la (3) in unità $x' = (E_c/\beta)x$, la (11) diviene nei quattro casi richiesti dalle (10)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= - \frac{\alpha(Z)E_0 H_1(1)}{\eta_0 \lambda'_1(1)} \left(\frac{\beta}{\eta_0} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\frac{M(\lambda, s+2)}{\lambda + A(s)} \right]_{\lambda=0}, \\ I_2 &= - \frac{\alpha(Z)E_0 H_1(1)}{\eta_0 \lambda'_1(1)} \left(\frac{\beta}{\eta_0} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\frac{N(\lambda, s+2)}{\lambda + A(s)} \right]_{\lambda=0}, \\ I_3 &= - \frac{\alpha(Z)E_0 H_1(1)}{\eta_0 \varepsilon' \lambda'_1(1)} \left(\frac{\beta}{\varepsilon'} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\frac{P(\lambda, s+2)}{\lambda + A(s)} \right]_{\lambda=0}, \\ I_4 &= + \frac{\alpha(Z)E_0 H_1(1)}{\eta_0 \varepsilon' \lambda'_1(1)} \left(\frac{\beta}{\varepsilon'} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\frac{Q(\lambda, s+2)}{\lambda + A(s)} \right]_{\lambda=0}, \end{aligned} \right.$$

in cui per l'aria $1/\alpha(7,22) = 9,06$. La (6) diviene:

$$(13) \quad M = F^{-1}(E_0, 0) \sum_{i=1}^4 \hat{I}_i,$$

ove la traccia elettronica integrale è nel nostro caso:

$$(14) \quad F(E_0, 0) = \frac{E_0}{\eta_0 \lambda_2(1) \lambda'_1(1)} \left[\sigma_0 + 2 \frac{C(1)}{A(1)} f(0, \eta_0, 1) + \frac{2\sigma_0}{A(1)} \frac{p(0, 0, 1) - q(0, 0, 1)}{\varepsilon'} \right].$$

Dalle relazioni (12) e (14) risulta che il coefficiente di Molière è indipendente dall'energia del primario elettronico.

4, — Per calcolare le espressioni I_k ($k = 1, 2, 3, 4$) e la traccia integrale abbiamo applicato alle equazioni di diffusione pubblicate in ^(4, 5) un procedimento risolutivo approssimato consistente nell'eguagliare le L -trasformate degli spettri elettronico e fotonico di bassa energia $[L_{\pi}(E_0, E/(1-v), t)/L_{\pi}(E_0, E, t)$ e, rispettivamente, $L_{\gamma}(E_0, W/v, t)/L_{\gamma}(E_0, W, t)]$ ai corrispondenti rapporti delle L -trasformate di alta energia. In tale modo il calcolo numerico si semplifica notevolmente perchè il parametro J che nei due citati lavori era stato definito in funzione della quota (individuata dalla condizione di sella relativa agli spettri non corretti per effetto Compton) e del rapporto fra l'energia del primario e del secondario, può essere identificato con il parametro s caratteristico della teoria degli sciame.

Nelle menzionate equazioni di diffusione è stato inoltre introdotto il termine

$$\int_E^{\eta_0} \bar{\gamma}(E_0, W, t) k(W, W-E) dW = \int_{E/\eta_0}^1 \bar{\gamma}\left(E_0, \frac{E}{u}, t\right) k(1-u) \frac{du}{E},$$

che esprime il numero di elettroni originariamente di energia inferiore ad E i quali, per collisione con un fotone di energia inclusa nell'intervallo $(W, W+dW)$ entrano nell'intervallo energetico $(E, E+dE)$. Questi elettroni trascurabili nella schematizzazione unidimensionale della cascata, essendo per lo più lenti, contribuiscono fortemente allo sviluppo laterale dello sciame e sono responsabili in modo piuttosto rilevante delle coincidenze registrate con contatori posti a distanze superiori a 150 metri.

L'introduzione degli elettroni Compton modifica, come si può facilmente rilevare, la funzione $\xi(E, \lambda, n)$ che compare nella teoria verticale di DALLA-PORTA, nel senso che nella funzione integranda alla sezione d'urto $\varphi(W)$ relativa al processo di produzione di coppie si aggiunge la sezione d'urto Compton

$$\chi(W) = \int_{\mu/2W}^1 k(w) \frac{dw}{W}.$$

L'influenza sullo spettro differenziale elettronico dei fotoni secondari diffusi per effetto Compton:

$$\int_{W/s'}^1 \bar{\gamma}(E_0, W/w, t) k(w) \frac{dw}{W},$$

i quali tendono ad aumentare la componente fotonica alle bassissime energie, è pure contenuta nella funzione $\xi(E, \lambda, n)$ e si manifesta nella correzione

$$\bar{\chi}(W) = \chi(W) - \frac{2G\mu}{W} \frac{s+1}{(s+1)(s+3)},$$

sulla sezione d'urto totale Compton, cosicchè nel denominatore della funzione integranda compare l'espressione $\lambda + \sigma(W) + \bar{\chi}(W)$, in cui il parametro λ deve intendersi variabile, come è richiesto dalle argomentazioni relative alla influenza dei poli dovuta al processo moltiplicativo. La dipendenza della $\xi(E, \lambda, n)$ e della $\Theta(E, \lambda, n)$, pure definita in ⁽⁴⁾, dal parametro λ è molto sensibile soprattutto nella regione delle basse energie; per questa ragione l'applicazione del teorema del prodotto integrale ha richiesto la valutazione di tutti i termini che definiscono le derivate seconde rispetto a λ delle funzioni $p(0, \lambda, s)$ e $q(0, \lambda, s)$.

Esprimendo le energie in unità mc^2 , si trova:

$$I_1 = 0,0003 \frac{E_0}{\eta_0}, \quad I_2 = 0,0002 \frac{E_0}{\eta_0}, \quad I_3 = 3,1373 \frac{E_0}{\eta_0}, \quad -I_4 = +1,6804 \frac{E_0}{\eta_0},$$

$$F(E_0, 0) = 9,5012 \frac{E_0}{\eta_0},$$

e quindi il coefficiente della probabilità differenziale $\mathcal{P}(x')dx'$, espresso in unità Molière, risulta:

$$M = 0,153(4).$$

Un confronto abbastanza significativo fra le varie teorie della cascata elettrofotonica proposte per le basse energie può essere eseguito in base al valore di M che consentono di calcolare, dato che tale valore dipende in modo molto critico della maggiore o minore adeguatezza della schematizzazione unidimensionale della cascata.

Con un calcolo piuttosto laborioso si ricava, in base alla teoria di BHABHA-CHAKRABARTY ⁽⁹⁾, considerata nella forma più rigorosa di SNYDER ⁽¹⁰⁾, che il coefficiente di Molière ha il valore $M = 0,093$, mentre, fondando il calcolo precedente sullo spettro integrale di « Approssimazione B » di Rossi-Greisen invece che su quello di Clementel, si trova:

$$M = - \frac{H_1(1)}{3\lambda_1'(1) \ln(183z^{-1/3})} \left[\frac{H_1(3)K_1(3, -3)}{-\lambda_1^3(3)} - \frac{H_2(3)K_2(3, -3)}{-\lambda_2^3(3)} \right] = 0,047(7).$$

Infine, in base al valore di $\langle R^2 \rangle$ calcolato da ROBERG-NORDHEIM, corretto in modo da tener conto di tutti gli elettroni di energia maggiore di zero e non solo di quelli che possiedono energia maggiore di $0,05\beta$, si trova $M = 0,1412$.

In conclusione, il valore trovato $M = 0,153$ sembra essere abbastanza plausibile, perchè il procedimento delineato, in quanto consente di valutare con una certa accuratezza il numero di elettroni generati sotto l'energia critica e tiene conto dell'espressione corretta della traccia integrale, non possiede,

oltre all'approssimazione *b*) del n. 1, quelle approssimazioni per difetto e rispettivamente per eccesso che sono implicite nei calcoli di MOLIERE e di EYGES.

Ringraziamo i proff. N. DALLAPORTA e E. CLEMENTEL per le utili discussioni e la dott. S. CHERSI che ha eseguito i calcoli numerici.

SUMMARY

The radial distribution of electrons in air showers is studied on the basis of the cascade theory of the photoelectronic component worked out by the Padua group. It is found that the probability of a singly scattered electron to be localized in the annular ring (x', dx') (x' in Molière units) is $\mathcal{P}(x') dx' = 0,153(dx'/x'^3)$. This result is compared with the predictions of other theories.

Su una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin 1/2.

P. CALDIROLA e P. GULMANELLI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano

(ricevuto il 15 Luglio 1951)

Riassunto. — Si confrontano i risultati che si ottengono da una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin 1/2, recentemente proposta da H. C. CORBEN in una teoria unitaria, con quelli che derivano dall'equazione di Dirac. In particolare si tratta il problema della struttura fina dei livelli dell'atomo idrogenoide e si esamina il significato che nella teoria di Corben assume il momento magnetico (normale e anomalo) di una particella.

1. — L'equazione di Corben.

H. C. CORBEN ⁽¹⁾ ha recentemente sviluppato una riformulazione della teoria quantistica dei campi ricorrendo all'uso di un formalismo in uno spazio a cinque dimensioni secondo il quale la carica elettrica di una particella è introdotta come operatore anzichè come numero ordinario. La teoria di Corben risulta sostanzialmente equivalente all'ordinaria teoria dei campi; l'unica differenza di rilievo consiste nel fatto che l'equazione ondulatoria per una particella di spin 1/2 non coincide esattamente con quella ormai tradizionale di Dirac. La nuova equazione di Corben per una particella sottoposta all'azione di un campo elettromagnetico può essere scritta nel seguente modo:

$$(1) \quad \left[\gamma_i \left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c} A_i \right) + \frac{ie}{\hbar c} \gamma_5 + \chi \right] \psi = 0,$$

⁽¹⁾ H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **9**, 580 (1952);.

dove i γ_i sono i consueti operatori di Neumann

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \gamma_4 = \beta, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\varrho_1;$$

e nella quale

$$(2) \quad b = \frac{e}{m_e c^2},$$

essendo m_e la massa che la particella viene a possedere pel fatto di essere dotata di carica elettrica e , mentre

$$\chi = \frac{m_0 c}{\hbar},$$

essendo m_0 la massa della particella « nuda ».

Si vede chiaramente, tenendo presente la (2), come l'equazione (1) differisca da quella di Dirac unicamente per il termine in γ_5 . In particolare, qualora si interpretasse tutta la massa osservabile di una particella dotata di carica come dovuta a questa, l'equazione di Corben diverrebbe:

$$(3) \quad \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eV - \boldsymbol{\alpha} \times (i\hbar c \text{ grad} - e\mathbf{A}) + \varrho_2 m_e c^2 \right] \psi = 0,$$

da confrontarsi con quella corrispondente di Dirac:

$$\left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eV - \boldsymbol{\alpha} \times (i\hbar c \text{ grad} - e\mathbf{A}) + \beta m_0 c^2 \right] \psi = 0.$$

In questo caso la differenza fra le due equazioni consiste dunque nella sostituzione nella prima del termine $\varrho_2 m_e c^2$ al termine $\beta m_0 c^2$.

Si pone pertanto il problema di studiare se una siffatta modifica della equazione di Dirac porti o no a qualche conseguenza suscettibile di verifica sperimentale. In relazione a questo scopo ci è parso utile studiare due problemi particolari: *a*) il moto di una particella in un campo centrale e, in particolare, coulombiano, *b*) il momento magnetico di una particella e le sue correzioni relativistiche.

2. - Moto di una particella in un campo centrale. Atomo idrogenoide.

Ci proponiamo anzitutto di calcolare gli autovalori e le autofunzioni per una particella a spin 1/2 che soddisfi alla (1) e che si muova in un campo centrale caratterizzato dalla funzione potenziale $U(r) = eV(r)$. Per amore di generalità supporremo che siano presenti entrambi i contributi m_e e m_0 alla massa della particella.

L'equazione degli stati stazionari si scrive pertanto:

$$(4) \quad \hat{W}u = \left[c\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} + \beta m_0 c^2 + q_2 \frac{e}{b} + eV(r) \right] u,$$

essendo W l'energia totale relativistica della particella.

La (4) equivale al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 + \frac{U - \hat{W}}{c} u_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_4 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{e}{\hbar b c} u_3 &= 0, \\ \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 + \frac{U - \hat{W}}{c} u_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_3 - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} + \frac{e}{\hbar b c} u_4 &= 0, \\ \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 + \frac{U - \hat{W}}{c} u_3 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{e}{\hbar b c} u_1 &= 0, \\ \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 + \frac{U - \hat{W}}{c} u_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{e}{\hbar b c} u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si può facilmente verificare ⁽²⁾ che il sistema ammette soluzioni di due tipi in corrispondenza di ogni singolo autovalore $\hat{W} = \hat{W}(n, l, j)$ caratterizzato dai tre numeri quantici n, l, j .

Soluzioni di Tipo I:

$$\begin{aligned} u_1 &= iF Y_{l+1}^m + i(l+m+1)H Y_l^m, & u_2 &= iF Y_{l+1}^{m+1} - i(l-m)H Y_l^{m+1}, \\ u_3 &= (l+m+1)G Y_l^m + K Y_{l+1}^m, & u_4 &= -(l-m)G Y_l^{m+1} + K Y_{l+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

Soluzioni di Tipo II:

$$\begin{aligned} u_1 &= i(l+m)F' Y_{l-1}^m + iH' Y_l^m, & u_2 &= -i(l-m-1)F' Y_{l-1}^{m+1} + iH' Y_l^{m+1}, \\ u_3 &= G' Y_l^m + (l+m)K' Y_{l+1}^m, & u_4 &= G' Y_l^{m+1} - (l-m-1)K' Y_{l+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

Ci limiteremo ad esaminare esplicitamente solo le soluzioni di Tipo I, potendosi verificare immediatamente che i due tipi di soluzioni conducono a risultati equivalenti (si passa dalle soluzioni di Tipo I a quelle di Tipo II sostituendo l con $-(l+1)$).

Le Y , che compaiono nelle espressioni precedenti, sono le ben note funzioni sferiche, mentre F, G, H, K sono funzioni di r che soddisfano al seguente

⁽²⁾ G. PETIAU: *Journ. de Phys.*, **12**, 810 (1951) ha usato un metodo analogo a quello da noi seguito per integrare le equazioni di Dirac per una particella sottoposta all'azione di un campo pseudoscalare.

sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\hbar} \frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} F + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r} \right) G + \frac{e}{\hbar b c} K &= 0, \\ -\frac{1}{\hbar} \frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} H + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r} \right) K + \frac{e}{\hbar b c} G &= 0, \\ \frac{1}{\hbar} \frac{-m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} G + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+2}{r} \right) F - \frac{e}{\hbar b c} H &= 0, \\ \frac{1}{\hbar} \frac{-m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} K + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r} \right) H - \frac{e}{\hbar b c} F &= 0. \end{aligned}$$

Tale sistema, ponendo:

$$f = rF, \quad g = rG, \quad h = rH, \quad k = rK,$$

e:

$$k = u_0 f, \quad h = v_0 g,$$

può essere ricondotto alla seguente forma più semplice:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l+1}{r} \right) g - \frac{1}{\hbar} \left(\frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} - \frac{e}{b c} u_0 \right) f &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) f - \frac{1}{\hbar u_0} \left(\frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} - \frac{e}{b c} \right) g &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) f + \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} - \frac{e}{b c} v_0 \right) g &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l+1}{r} \right) g + \frac{1}{\hbar v_0} \left(-\frac{m_0 c^2 + U - \dot{W}}{c} - \frac{e}{b c} \right) f &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le condizioni di compatibilità impongono che le funzioni u_0 e v_0 verifichino il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$u_0 + v_0 = 0,$$

$$\frac{e}{b c} (1 + u_0 v_0) + m_0 c (u_0 - v_0) + \frac{\dot{W}}{c} (u_0 + v_0) = 0,$$

da cui risulta:

$$(6) \quad u_0 = -v_0, \quad v_0 = -\frac{m_0 c^2 b}{e} \pm \sqrt{\left(\frac{m_0 c^2 b}{e} \right)^2 + 1}.$$

Per di più una discussione sui segni, che non riportiamo, porta alla scelta del segno positivo davanti al radicale.

Con ciò il sistema (5) si riduce al seguente:

$$(7) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l+r}{r} \right) g - \frac{1}{\hbar} \left(m_0 c^2 + \frac{U}{e} - \frac{\dot{W}}{e} + \frac{e}{bc} v_0 \right) f = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r} \right) f + \frac{1}{\hbar} \left(-m_0 c^2 + \frac{U}{e} - \frac{\dot{W}}{e} - \frac{e}{bc} v_0 \right) g = 0. \end{cases}$$

Nel caso che il campo sia coulombiano ($V(r) = -Ze/r$), per eseguire l'integrazione si può seguire, come nel caso corrispondente delle equazioni di Dirac, il ben noto metodo di Darwin. Si arriva così alla seguente espressione per gli autovalori:

$$(8) \quad \dot{W} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}} \left[1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{(n' + \sqrt{j^2 - Z^2 \alpha^2})^2} \right]^{-1/2},$$

ove $j = l + 1/2$ e α è la costante di struttura fina

Come si vede l'espressione degli autovalori coincide completamente con quella che si ottiene risolvendo per lo stesso problema l'equazione di Dirac, pur di interpretare l'espressione:

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{e^2}{b^2 c^4}}$$

come massa effettiva della particella.

Si osservi esplicitamente che anche nel caso che la massa della particella fosse completamente legata alla carica elettrica, onde $m_0 = 0$ e $m = e/bc^2 = m_e$, l'espressione degli autovalori per l'atomo idrogenoide è identica a quella della teoria di Dirac. Va però notato che, come risulta dalle (6), le autofunzioni dell'equazione di Corben differiscono da quelle della corrispondente equazione di Dirac; nel caso particolare di una massa tutta legata alla carica, si dovrà porre nelle (6) $m_0 = 0$ onde risulta $v_0 = 1$ anziché $v_0 = 0$ come nella teoria di Dirac.

3. - Il momento magnetico della particella a spin 1/2.

Come secondo problema ci siamo proposti di calcolare il momento magnetico di una particella che soddisfi all'equazione di Corben, considerando sia il caso che essa si muova sotto la sola azione di un campo magnetico costante, sia il caso che essa si muova sotto l'azione di un campo di forze centrali (non necessariamente elettromagnetiche) a cui si sovrappone quella di un campo magnetico costante.

Particella libera in un campo magnetico costante. — Supporremo il campo magnetico di intensità costante H_0 diretto come l'asse z ma orientato in senso opposto. Il calcolo è analogo a quello eseguito da RABI ⁽³⁾ per un elettrone di Dirac e da uno di noi ⁽⁴⁾ per una particella dotata anche di momento magnetico supplementare (termine di Pauli).

L'equazione di Dirac-Pauli per il problema in considerazione si scrive:

$$(9) \quad \frac{W}{c} u = \left[\alpha \times p + \beta m_0 c + \frac{e}{bc} q_2 - \alpha \times \frac{eA}{c} + \frac{\lambda}{c} S \times H \right] u,$$

con:

$$S = -\beta \sigma \quad \text{e} \quad \sigma' = -i \alpha^m \alpha^n.$$

Ricorrendo a coordinate polari le equazioni esplicite, equivalenti alla equazione spinoriale (9), si scrivono:

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} + m_0 c - \frac{\lambda H_0}{c} \right) u_1 + \exp[-i\varphi] \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e H_0}{2c} r \right) u_4 + \frac{1}{\hbar} \frac{e}{bc} u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} + m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) u_2 + \exp[i\varphi] \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e H_0}{2c} r \right) u_3 + \frac{1}{\hbar} \frac{e}{bc} u_4 - \frac{\partial u_4}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} - m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) u_3 + \exp[-i\varphi] \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e H_0}{2c} r \right) u_2 - \frac{1}{\hbar} \frac{e}{bc} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} - m_0 c - \frac{\lambda H_0}{c} \right) u_4 + \exp[i\varphi] \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{e H_0}{2c} r \right) u_1 - \frac{1}{\hbar} \frac{e}{bc} u_2 - \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0.$$

Questo sistema ammette una soluzione particolare, che è quella di interesse fisico, del tipo:

$$u_\mu = F_\mu(r) \exp \left[i n_\mu \varphi + \frac{i}{\hbar} p z \right], \quad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

dove p è una costante qualsiasi e rappresenta fisicamente l'impulso della particella parallelo al campo, e gli n_μ numeri interi che risultano legati dalle seguenti relazioni:

$$n_1 = n_2 - 1, \quad n_3 = n_2 - 1, \quad n_4 = n_2.$$

⁽³⁾ I. I. RABI: *Zeits. f. Phys.*, **49**, 507 (1928).

⁽⁴⁾ P. CALDIROLA: *Rend. Ist. Lomb. Scienze*, **77**, 173 (1943-44).

Ponendo ancora:

$$F_{\mu}(r) = \exp \left[-\frac{eH_0}{2c} \frac{\pi}{\hbar} r^2 \right] \cdot R_{\mu}(r),$$

si hanno le seguenti equazioni per le $R_{\mu}(r)$:

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} + m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) r R_1 + \left(\frac{i}{\hbar} p + \frac{e}{\hbar b c} \right) r R_3 + n_2 R_4 + r \frac{dR_4}{dr} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} + m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) r R_2 - \left(\frac{i}{\hbar} p - \frac{e}{\hbar b c} \right) r R_4 - (n_2 - 1) R_3 - \frac{1}{\hbar} \frac{eH_0}{c} r^2 R_3 + r \frac{dR_3}{dr} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} - m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) r R_4 + \left(\frac{i}{\hbar} p - \frac{e}{\hbar b c} \right) r R_1 + n_2 R_2 + r \frac{dR_2}{dr} = 0,$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(-\frac{W}{c} - m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) r R_4 - \left(\frac{i}{\hbar} p + \frac{e}{\hbar b c} \right) r R_2 - (n_2 - 1) R_1 - \frac{1}{\hbar} \frac{eH_0}{c} r^2 R_1 + r \frac{dR_1}{dr} = 0.$$

Si possono integrare queste equazioni col solito sviluppo:

$$R_{\mu}(r) = r^a \sum_{s \geq 0} c_s^{(\mu)} r^s,$$

e, senza difficoltà, si trova che si hanno soluzioni accettabili solo se è verificata la condizione:

$$\begin{vmatrix} -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{W}{c} - m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) & 0 & \frac{1}{\hbar} \left(ip + \frac{e}{bc} \right) & 2N \\ 0 & \frac{i}{\hbar} \left(\frac{W}{c} - m_0 c - \frac{\lambda H_0}{c} \right) & \frac{eH_0}{c} & ip - \frac{e}{bc} \\ \frac{i}{\hbar} \left(ip - \frac{e}{bc} \right) & 2N & -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{W}{c} + m_0 c - \frac{\lambda H_0}{c} \right) & 0 \\ \frac{eH_0}{c} & ip + \frac{e}{bc} & 0 & \frac{i}{\hbar} \left(\frac{W}{c} + m_0 c + \frac{\lambda H_0}{c} \right) \end{vmatrix} = 0$$

con $N = 0, 1, 2, \dots$

È questa un'equazione biquadratica in W che risolta dà i seguenti quattro valori possibili dell'energia:

$$(10) \quad \begin{cases} W_1 = + \sqrt{M^2 c^4 + \lambda^2 H_0^2} + 2N H_0 e \hbar c + 2\lambda H_0 m_0 c^2 \eta, \\ W_2 = + \sqrt{M^2 c^4 + \lambda^2 H_0^2} + 2N H_0 e \hbar c - 2\lambda H_0 m_0 c^2 \eta, \\ W_3 = - \sqrt{M^2 c^4 + \lambda^2 H_0^2} + 2N H_0 e \hbar c + 2\lambda H_0 m_0 c^2 \eta, \\ W_4 = - \sqrt{M^2 c^4 + \lambda^2 H_0^2} + 2N H_0 e \hbar c - 2\lambda H_0 m_0 c^2 \eta, \end{cases}$$

ove si è posto:

$$M^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 + \frac{e^2}{b^2} = m^2 c^4 + p^2 c^2, \quad \eta = \sqrt{1 + \frac{NH_0 e \hbar}{\pi m_0^2 c^3}},$$

e il cui significato fisico è immediato.

Si noti che nell'approssimazione newtoniana ($p = 0$) si ha:

$$W = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{e^2}{b^2}} + \left(2N \frac{e \hbar}{4\pi c \sqrt{m_0^2 + \frac{e^2}{b^2 c^4}}} \pm \lambda \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + \frac{e^2}{b^2 c^4}}} \right) H_0,$$

per cui la particella verrà ad essere dotata del momento magnetico seguente:

$$(11) \quad \mu = 2N \frac{e \hbar}{4\pi m c} \pm \lambda \frac{m_0}{m},$$

che può essere scomposto in tre parti:

$$(11') \quad (2N + 1) \frac{e \hbar}{4\pi m c} \quad \pm \frac{e \hbar}{4\pi m c} \quad \pm \lambda \frac{m_0}{m},$$

dovute rispettivamente al moto di precessione della particella (carica) attorno alla direzione del campo, al momento magnetico intrinseco legato allo spin e alla carica della particella di Dirac e al termine supplementare di Pauli. Si noti che quest'ultimo nella teoria di Corben risulta ridotto, rispetto al valore che esso ha nella teoria di Dirac, nel rapporto m_0/m : in particolare nell'approssimazione in cui ci siamo posti, per la quale $e \hbar H_0 / 4\pi m c \ll M_0 c^2$, esso si annulla se la massa della particella è completamente legata alla carica.

Particella in un campo centrale e campo magnetico costante. — Calcoleremo ora il momento magnetico di una particella che soddisfi all'equazione di Corben (con termine supplementare di Pauli) e che si muova in un campo di forze centrali (non necessariamente elettromagnetiche) e sotto l'azione del campo magnetico costante H_0 orientato come nel problema precedente.

Il calcolo è analogo a quello eseguito da MARGENAU ⁽⁵⁾ per una particella di Dirac (senza momento magnetico supplementare) e da uno di noi ⁽⁶⁾ per una particella di Dirac-Pauli.

⁽⁵⁾ H. MARGENAU: *Phys. Rev.*, **57**, 383 (1940).

⁽⁶⁾ P. CALDIROLA: *Phys. Rev.*, **69**, 608 (1946); *Nuovo Cimento*, **4**, 89 (1947).

L'equazione fondamentale del problema è la seguente:

$$(12) \quad \frac{W-U}{c} u = \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p} + \beta m_0 c + \frac{e}{bc} \varrho_2 + A \right] u,$$

ove si è posto:

$$(13) \quad A = -\frac{e}{c} (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{A}) + \frac{\lambda}{c} (\mathbf{S} \times \mathbf{H}).$$

L'equazione (9) si integra col metodo delle perturbazioni considerando A come termine perturbativo. In approssimazione zero ($A = 0$) si è ricondotti a risolvere l'equazione (4). L'azione della perturbazione provoca una variazione dell'energia $\dot{W}(n, l, j)$ di uno stato stazionario data da:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{W} &= c \iiint \sum_k u_k^*(n, l, j) A u_k(n, l, j) d\tau = \\ &= -\frac{eH_0}{2} \iiint [u_1^* i(x - iy) u_4 - u_2^* i(x + iy) u_3 + u_3^* i(x - iy) u_2 - u_4^* i(x + iy) u_1] d\tau - \\ &= -\lambda H_0 \iiint [u_1^* u_1 - u_2^* u_2 - u_3^* u_3 + u_4^* u_4] d\tau \quad (d\tau = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dx). \end{aligned}$$

Passando a coordinate polari ed eseguendo calcoli che non riportiamo per esteso, si perviene al seguente risultato:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \dot{W} &= \frac{eH_0}{2} \frac{16\pi(l-m)! (l+m+1)! (l+1)(2m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \times \\ &\quad \times (1+v_0^2) \frac{\left(l+\frac{3}{2}\right)x - \left(l+\frac{1}{2}\right)y}{\frac{2}{\hbar c} \left(m_0 c^2 + \frac{e}{b} v_0\right)} - \\ &\quad - \lambda H_0 4\pi (l+m+1)! (l-m)! (2m+1)(v_0^2-1) \left[\frac{x}{2l+1} + \frac{y}{2l+3} \right], \end{aligned} \right.$$

dove:

$$x = \int_0^\infty F^2 r^2 dr \quad \text{e} \quad y = \int_0^\infty G^2 r^2 dr,$$

sono grandezze legate fra loro dalla condizione di normalizzazione, che si può

scrivere sotto la forma seguente:

$$1 = (x + y)4\pi(l + m + 1)!(l - m)!(1 + v_0^2),$$

e dalla seguente relazione, deducibile direttamente dal sistema di equazioni radiali,

$$\int_0^\infty \varepsilon F^2 r^2 dr = \int_0^\infty (\varepsilon + 2) G^2 r^2 dr,$$

essendo:

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{cin}}}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}}.$$

È facile trovare per $\Delta \tilde{W}$ delle espressioni particolarmente semplici nei casi asintotici $v \rightarrow c$ e $v \rightarrow 0$.

Nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{W} = & \frac{(l+1)(2m+1)}{(2l+1)(2l+3)} H_0 \frac{ehc}{4\pi \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} + \\ & + 2 \frac{(l+1)(2m+1)}{(2l+1)(2l+3)} H_0 \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} \lambda, \end{aligned}$$

e nel secondo:

$$\Delta \tilde{W} = \frac{(l+1)(2m+1)}{(2l+1)} H_0 \frac{ehc}{4\pi \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} + \frac{2m+1}{2l+1} H_0 \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} \lambda.$$

Corrispondentemente si hanno le seguenti espressioni per il momento magnetico della particella:

per $v \rightarrow c$:

$$(15) \quad \mu = \left[\left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{ehc}{4\pi \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} + (2j+1) \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} \lambda \right] \frac{1}{2(j+1)};$$

per $v \ll c$:

$$\begin{aligned} (16) \quad \mu = & \left(j + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{j + \frac{1}{2}}{j + 1} \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{ehc}{4\pi \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} + \\ & + \left(1 - \frac{1}{2(j+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} \lambda; \end{aligned}$$

quest'ultima, nell'approssimazione newtoniana ($v = 0$), si riduce a:

$$(17) \quad \mu = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{ehc}{4\pi \sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(m_0 c^2)^2 + \frac{e^2}{b^2}}} \lambda.$$

Si noti che, come nel caso precedente, nell'approssimazione in cui $\lambda H_0 \ll m_0 c^2$, se la particella ha massa interamente legata alla carica il termine in λ si annulla; viceversa se la massa è tutta di origine non elettrica si ha $\mu = \lambda$.

Osservazione — È noto che il momento magnetico del protone può essere scritto sotto la seguente forma: $\mu_p = \mu_0 + \lambda_p$; essendo $\mu_0 = eh/4\pi m_p c$ il magnetone nucleare e $\lambda_N = 1,793\mu_0$; mentre quello del neutrone è dato da $\mu_N = \lambda_N$ con $\lambda_N = -1,913\mu_0$. D'altra parte se riteniamo che la massa del protone sia di origine parzialmente elettrica, si dovrà avere per la (17):

$$(18) \quad \lambda_p = \lambda \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 + M_e^2}}.$$

con $\sqrt{M_0^2 + M_e^2} = 1836 m_{e1}$. Si può allora porre il problema di esaminare se è possibile interpretare la differenza tra il momento magnetico supplementare del protone e il momento magnetico del neutrone (o meglio dell'antineutrone) come dovuto all'esistenza nel protone di una massa parziale legata alla carica. Supposto pertanto $\lambda = -\lambda_N$, si può determinare il valore di M_e che, sostituito nella (18), porti al valore osservato di λ_p . Si trova $M_e \simeq 203 m_{e1}$. Può essere interessante notare come il valore della massa protonica legata alla carica sia circa eguale al valore della massa del mesone μ .

Conclusioni.

I calcoli, eseguiti nei paragrafi precedenti, mostrano come gli autovalori per l'atomo idrogenoide che si ricavano dall'equazione di Corben coincidano (previa normalizzazione della massa) con quelli deducibili dall'equazione di Dirac. Questo risultato è del tutto generale, in quanto si verifica immediatamente che, per una particella non dotata di momento magnetico supplementare, l'equazione del 2° ordine che si ottiene iterando l'equazione di Corben coincide con quella che si ottiene iterando l'equazione di Dirac. Esistono però differenze nelle espressioni delle autofunzioni, le quali possono, in qualche caso, avere interesse fisico.

Differenze anche negli autovalori delle due equazioni si hanno invece se alla particella a spin 1/2 si attribuisce un momento magnetico supplementare, introducendo nelle equazioni un termine di Pauli. In questo caso infatti le proprietà magnetiche della particella dipendono in modo notevole dalla natura della massa della particella stessa.

Uno dei due autori (P. G.) ringrazia il Consiglio Nazionale delle Ricerche per il conferimento di una Borsa di studio che gli ha reso possibile la permanenza presso l'Istituto di Scienze Fisiche dell'Università di Milano.

SUMMARY

The results obtained by a new ondulatory equation for a spin $1/2$ particle, recently proposed by CORBEN in an unitary field theory, are compared with those arising from the ordinary Dirac equation. Particularly the problem of the fine structure for hydrogen like atom levels is considered and the relation between the magnetic moment and the nature of the particle mass is examined.

Sull'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman.

S. FUBINI

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 17 Luglio 1952)

Riassunto. — Si dimostra che l'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman diagonalizza la Hamiltoniana totale anche nel caso in cui esso non è definito mediante il metodo delle perturbazioni. L'operatore $U(t)$ è però, in generale, solo unitario in un senso ristretto, il che ci permette di estendere le nostre considerazioni anche al caso in cui esista uno spettro discreto di autovalori della Hamiltoniana.

1. — Introduzione.

È stato dimostrato da FERRETTI, in una serie di suoi recenti lavori ⁽¹⁾, che l'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman genera una trasformazione canonica che diagonalizza la hamiltoniana totale del sistema.

In questo lavoro ci proponiamo di estendere le considerazioni di FERRETTI al caso in cui non sia valido un calcolo di perturbazioni.

La dimostrazione che daremo si basa sull'ipotesi adiabatica, la quale è indispensabile nella forma attuale della teoria dei campi, poichè senza di essa non è possibile definire l'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman ⁽²⁾.

Infatti l'equazione ⁽³⁾:

$$(1) \quad \frac{dU(t)}{dt} + iV(t)U(t) = 0.$$

⁽¹⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 79, 783 (1950); **8**, 109 (1951); F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949); R. P. FEYNMANN: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367 (1948).

⁽²⁾ B. A. LIPPMANN e J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **79**, 469 (1950); H. SNYDER: *Phys. Rev.*, **83**, 1154 (1951).

⁽³⁾ Nel corso di questo lavoro useremo un sistema di misura in cui sia $i = \sqrt{-1}$

assieme alla condizione iniziale

$$(2) \quad U(-\infty) = 1$$

è equivalente all'equazione di Volterra:

$$(3) \quad U(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t V(t') U(t') dt'.$$

L'equazione a secondo membro ammette soluzioni solo se l'integrale (nel senso di Riemann) al secondo membro esiste; questo avviene solo se per $t \rightarrow -\infty$, l'integrando tende a zero più velocemente di $1/t$.

È perciò opportuno, per definire l'operatore $U(t)$, ricorrere al seguente procedimento: si moltiplica $V(t)$ per un fattore di convergenza $\lambda(\alpha, t)$ tendente, per $t \rightarrow -\infty$, a zero più in fretta di $1/t$ e tale che $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha, t) = 1$; $\lim_{\alpha \rightarrow 0} d\lambda(\alpha, t)/d\alpha = 0$ (si potrà, per esempio, assumere $\lambda(\alpha, t) = \exp[-\alpha t^2]$); si definisce quindi un operatore $U(\alpha, t)$ mediante l'equazione:

$$(4) \quad \frac{dU(\alpha, t)}{dt} + i\lambda(\alpha, t)V(t)U(\alpha, t) = 0,$$

e la condizione iniziale:

$$(5) \quad U(\alpha, -\infty) = 1.$$

Per valori di t finiti si fa tendere α a zero, e si pone:

$$(6) \quad U(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U(\alpha, t).$$

2. - Proprietà dell'operatore $U(\alpha, t)$.

Le considerazioni che faremo si applicano a tutti i casi in cui l'energia di interazione V , nella rappresentazione di Schrödinger, non dipende dal tempo. Esse si applicano perciò alla teoria quantistica dei campi localizzati, in cui la Hamiltoniana di interazione dipende dal tempo solo attraverso gli operatori dei campi.

L'interazione $V(t)$ che compare nelle (1), (3), (4) è espressa nella « rappresentazione di interazione » e si ricava dalla V della rappresentazione di Schrödinger mediante la trasformazione canonica:

$$(7) \quad V(t) \exp[iEt] V \exp[-iEt],$$

da cui segue l'equazione:

$$(8) \quad \frac{dV(t)}{dt} = i[E V(t)].$$

Sia $\bar{U}(\alpha, t)$ l'operatore coniugato hermitiano di $U(\alpha, t)$, esso obbedisce alle equazioni:

$$(4') \quad \frac{d\bar{U}(\alpha, t)}{dt} - i\lambda(\alpha, t)\bar{U}(\alpha, t)V(t) = 0$$

$$(5') \quad \bar{U}(\alpha, -\infty) = 0,$$

$$(6') \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{U}(\alpha, t) = \bar{U}(b).$$

Dalle equazioni (4) e (4') si ricava:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} [U(\alpha, t)U(\alpha, t)] = 0,$$

da cui, ricordando le (5), (5'), (6), (6'):

$$(10) \quad U(\alpha, t)U(\alpha, t) = 1,$$

$$(11) \quad U(t)U(t) = 1.$$

Osserviamo che non si può dimostrare allo stesso modo la relazione $U(t)U(t) = 1$ ⁽⁴⁾ la quale non è in generale vera. Questa osservazione ci sarà utile in seguito.

Dalle equazioni (4) e (8) si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U(\alpha, t)}{dt^2} = -i \left[\frac{d\lambda(\alpha, t)}{dt} V(t)U(\alpha, t) + \lambda(\alpha, t) \frac{dV(t)}{dt} U(\alpha, t) + \lambda(\alpha, t)V(t) \frac{dU(\alpha, t)}{dt} \right] \\ \frac{d}{dt} [E U(\alpha, t)] = -\lambda(\alpha, t) \frac{dV(t)}{dt} U(\alpha, t) - i\lambda(\alpha, t)V(t)[E U(\alpha, t)]. \end{aligned}$$

Di qui, ponendo:

$$(12) \quad \frac{dU(\alpha, t)}{dt} - i[E U(\alpha, t)] = C(\alpha, t),$$

(4) M. NEUMAN: *Phys. Rev.*, **83**, 671 (1951).

si ottiene:

$$(13) \quad \frac{dC(\alpha, t)}{dt} + i\lambda(\alpha, t)V(t)C(\alpha, t) = -i \frac{d\lambda(\alpha, t)}{dt} V(t)U(\alpha, t),$$

$$(14) \quad C(\alpha, -\infty) = 0.$$

Per $\alpha \rightarrow 0$, tende a zero il secondo membro della (13); quindi dalle (13), (14) per ragioni di continuità segue:

$$(15) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} C(\alpha, t) = 0.$$

3. - L'operatore W .

Consideriamo l'operatore:

$$(16) \quad W(\alpha, t) = \exp[-iEt]U(\alpha, t)\exp[iEt].$$

Derivando si ottiene:

$$(17) \quad \frac{dW(\alpha, t)}{dt} = \exp[-iEt]C(\alpha, t)\exp[iEt],$$

da cui, ricordando la (15):

$$(18) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} W(\alpha, t) = W,$$

dove W ⁽⁵⁾ è un operatore indipendente dal tempo.

Ci proponiamo ora di dimostrare che l'operatore W diagonalizza la hamiltoniana totale H

$$\begin{aligned} HW(\alpha, t) &= (E + V)W(\alpha, t) = (E + V)\exp[-iEt]U(\alpha, t)\exp[iEt] = \\ &= \exp[-iEt][E + V(t)]U(\alpha, t)\exp[iEt] = \exp[-iEt]U(\alpha, t)\exp[iEt]E + \\ &+ \frac{1}{\lambda(\alpha, t)}\exp[-iEt]\frac{dU(\alpha, t)}{dt}\exp[iEt] + \exp[-iEt][E - U(\alpha, t)]\exp[iEt] = \\ &= W(\alpha, t)E + \frac{1}{\lambda(\alpha, t)}\exp[-iEt]\{C(\alpha, t) - [1 - \lambda(\alpha, t)][E - U(\alpha, t)]\}\exp[iEt], \end{aligned}$$

⁽⁵⁾ L'operatore W da noi definito con metodi dipendenti dal tempo coincide con l'operatore Ψ definito da C. MÖLLER con metodi stazionari. *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **23**, 1 (1945).

facendo tendere α a zero per valori di t finiti si ottiene:

$$(19) \quad HW = WE,$$

e prendendo i coniugati hermitiani di ambo i membri:

$$(19') \quad \bar{W}H = E\bar{W}.$$

Dalla (19) segue che l'operatore W trasforma una autofunzione di E in una autofunzione di H corrispondente allo stesso autovalore. Infatti se Φ_a è una autofunzione di E corrispondente all'autovalore E_a dalla (19) si ottiene:

$$(20) \quad HW\Phi_a = E_aW\Phi_a.$$

Dalla (10) segue:

$$(21) \quad \bar{W}W = 1,$$

cioè il sistema delle $W\Phi_a$ è ortonormale.

Ci si può domandare se il sistema delle $W\Phi_a$ sia completo. La risposta dovrà essere negativa poichè H può avere degli autovalori (livelli energetici dei sistemi legati) che E non ha.

Possiamo renderci conto di questo mediante le seguenti considerazioni:
Poniamo:

$$(22) \quad W\bar{W} = \mathcal{E},$$

per la (21) deve essere:

$$(23) \quad \mathcal{E}^2 = \mathcal{E},$$

da cui segue che \mathcal{E} ha per autovalori 0 ed 1. Dalle (19), (19') segue inoltre che:

$$(24) \quad [\mathcal{E}H] = 0.$$

Esiste perciò un sistema completo di autofunzioni comuni ad \mathcal{E} e ad H . Le autofunzioni $W\Phi_a$ sono autofunzioni di \mathcal{E} corrispondenti all'autovalore 1. Infatti:

$$(25) \quad \mathcal{E}W\Phi_a = W\bar{W}W\Phi_a = W\Phi_a.$$

Le autofunzioni comuni di H e di \mathcal{E} corrispondenti all'autovalore 0 corrispondono perciò allo spettro discreto di autovalori di H , mentre le autofunzioni corrispondenti all'autovalore 1, corrispondono allo spettro continuo.

Ringrazio il prof. G. WATAGHIN per il suo cordiale interessamento e per le utili e chiarificatrici discussioni avute sull'argomento.

S U M M A R Y

The Dyson-Feynman operator $U(t)$ is shown to diagonalize the total Hamiltonian independently from any perturbation-theoretical treatment. The fact that, in general, $U(t)$ is unitary only in a restricted sense is used to extend this study to the case in which the Hamiltonian admits also discrete eigenvalues.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sulla capacità di un condensatore sferico.

F. BERTOLINI

Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo - Roma

(ricevuto il 15 Giugno 1952)

La capacità c_0 di un condensatore sferico, di cui l'armatura interna abbia raggio r e quella esterna raggio R , è data dalla nota formula

$$(1) \quad c_0 = rR/(R - r),$$

nel sistema C.G.S. elettrostatico di unità. In pratica, l'armatura esterna di un condensatore sferico presenta un'apertura, onde permettere il caricamento dell'armatura interna, e quindi la (1) deve considerarsi affetta da un errore: vogliamo stabilire una limitazione (inferiore e superiore) di tale errore. Essa si consegue facilmente, utilizzando una nota proprietà di media delle funzioni armoniche in uno strato sferico ⁽¹⁾.

1. - Si abbia uno strato sferico di centro O , raggio interno r e raggio esterno R ; sia ω la superficie sferica di centro O e raggio 1, $d\omega(Q)$ l'elemento d'area di questa nel punto Q ; per individuare un punto dello spazio, ne daremo la distanza ϱ da O e la proiezione P da O sulla superficie ω ; sia $u(\varrho, P)$ una funzione armonica nello strato sferico accennato. Secondo l'indicata proprietà di media, riesce

$$(2) \quad \mu(\varrho) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} u(\varrho, P) d\omega(P) = a + \frac{b}{\varrho}, \quad \text{per } r \leq \varrho \leq R.$$

dove a e b sono costanti.

Ne segue

$$\mu'(\varrho) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} u_{\varrho}(\varrho, P) d\omega(P) = -\frac{b}{\varrho^2},$$

⁽¹⁾ Cfr. M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore* (Napoli 1940), p. 96.

e quindi

$$(3) \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \varrho^2 u_{\varrho}(\varrho, P) d\omega(P) = b, \quad \text{per } r \leq \varrho \leq R,$$

D'altra parte, dalla (2) scritta per $\varrho = r$ e per $\varrho = R$ si ricava

$$(4) \quad b = \frac{rR}{R-r} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} [u(r, P) - u(R, P)] d\omega(P),$$

e quindi (dal confronto delle (3) e (4)) il teorema:

Il flusso di una funzione armonica in uno strato sferico, attraverso una superficie S regolare semplice chiusa contenuta nello strato e contenente nel proprio interno il centro dello strato, vale

$$(5) \quad \int_S \frac{du}{dn_e} d\sigma = \frac{rR}{R-r} \int_{\omega} [u(R, P) - u(r, P)] d\omega(P) - 4\pi \frac{rR}{R-r} [\mu(R) - \mu(r)].$$

La (4) e la (5) possono anche dedursi (assai meno rapidamente) dalle formole che danno una funzione armonica in uno strato sferico, della quale siano noti i valori sulla frontiera dello strato stesso ⁽²⁾.

2. - Venendo ora allo scopo di questa nota, sia C^0 il condensatore sferico *ideale*, costituito di una sfera T_1 di raggio r e centro O , e di uno strato sferico concentrico T_2^0 , di raggio interno R ($> r$) e spessore arbitrario; sia S_1 la superficie della sfera T_1 , S_2 la superficie interna dello strato T_2^0 . Sia C il condensatore sferico *reale*, costituito della sfera T_1 , e del settore di strato sferico T_2 ottenuto asportando da T_2^0 tutti i punti interni ad un cono circolare di vertice in O e semiapertura δ ; sia Σ la traccia di tale cono su S_2 , sia γ la traccia di tale cono su ω .

Com'è ben noto, se portiamo T_1 al potenziale 1, T_2 al potenziale 0, in tutti i punti dello spazio si genera un potenziale $u(\varrho, P)$, funzione armonica nell'insieme complementare di C , e verificante le condizioni

$$(6) \quad u(r, P) \equiv 1, \quad u(R, P) = 0 \quad \text{su } S_2 - \Sigma, \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} u(\varrho, P) = 0;$$

d'altra parte, la capacità di C è data dalla formola

$$c = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{du}{dn_e} d\sigma,$$

e quindi (per le (4), (5), (6))

$$(7) \quad c = \frac{rR}{R-r} \left[1 - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} u(R, P) d\omega(P) \right];$$

l'errore relativo da cui è affetta la (1), quindi, vale

$$(8) \quad \frac{c_0 - c}{c_0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} u(R, P) d\omega(P) = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} u(R, \varphi) \sin \varphi d\varphi > 0,$$

⁽²⁾ Cfr. M. PICONE; op. cit., p. 371.

avendo indicato con φ la colatitudine del punto P in un sistema di coordinate polari di polo in O , avente per asse polare l'asse di simmetria di Σ diretto nel verso che da O va a Σ ⁽³⁾.

Per ottenere delle limitazioni dell'errore relativo $(c_0 - c)/c_0$ basterà ora trovare delle limitazioni per $u(R, \varphi)$.

3. - Consideriamo la funzione $(r/\varrho) - u(\varrho, P)$: essa vale zero su S_1 , è positiva sulla frontiera di T_2 , infinitesima all'infinito, armonica nell'insieme complementare di C , quindi è sempre positiva in tale insieme: ne segue, in particolare,

$$(9') \quad 0 \leq u(R, \varphi) \leq r/R \quad \text{per} \quad 0 \leq \varphi \leq \delta.$$

Consideriamo ora la funzione

$$\frac{(r/\varrho)^2 \cos \varphi - (r/\varrho)(r/R) \cos \delta}{1 - (r/R) \cos \delta} - u(\varrho, P):$$

essa è non positiva sia sulla frontiera di T_2 che sulla superficie S_1 , infinitesima all'infinito, armonica nell'insieme complementare di C , quindi è sempre non positiva in tale insieme; ne segue in particolare

$$(9'') \quad \frac{(r/R)^2 [\cos \varphi - \cos \delta]}{1 - (r/R) \cos \delta} \leq u(R, \varphi) \quad \text{per} \quad 0 \leq \varphi \leq \delta.$$

Dalle (8), (9'), (9'') segue la limitazione cercata

$$(10) \quad \frac{(r/R)^2 \sin^4 (\delta/2)}{1 - (r/R) \cos \delta} \leq \frac{c_0 - c}{c_0} \leq (r/R) \sin^2 (\delta/2).$$

Da verifiche eseguite in qualche caso particolare, avendo determinato l'errore relativo sperimentalmente con il calcolatore analogico del prof. PERSICO, $(c_0 - c)/c_0$ è risultato approssimativamente eguale alla media geometrica tra i due limiti indicati, e precisamente (per $r = 4$, $R = 18$, $\pi/4 > \delta > \pi/15$) una decina di volte maggiore di quello inferiore, una decina di volte minore di quello superiore ⁽⁴⁾ ^(*).

⁽³⁾ Data la simmetria assiale delle condizioni (6), anche la funzione $u(\varrho, P)$ godrà di tale simmetria assiale, ossia, nel sistema di coordinate polari scelto, sarà indipendente dalla longitudine: se φ è la colatitudine di P , porremo $u(\varrho, \varphi) \equiv u(\varrho, P)$.

⁽⁴⁾ Non ci è noto che altri abbia trattato matematicamente il problema della determinazione di $(c_0 - c)/c_0$; tuttavia in una nota di E. B. ROSA ed N. E. DORSEY [*A new determination of the ratio of the electromagnetic to the electrostatic Unit of electricity*, in *Bullettin of the Bureau of Standards*, vol. 3, nn. 3-4, pp. 481 e segg. (1907)] questa grandezza viene determinata sperimentalmente.

^(*) La Redazione del *Nuovo Cimento* ringrazia il Dr. CH. MOON Capo della Sezione Induttanza e Capacità della Divisione Elettricità del Bureau of Standards per aver fornito l'indicazione bibliografica riportata nella nota precedente (*N.d.R.*).

Sulle soluzioni dell'equazione di Dirac-Corben.

A. LOINGER

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 15 Luglio 1952)

Per equazione di Dirac-Corben ⁽¹⁾ intendiamo l'equazione

$$(1) \quad [\gamma_\mu \pi_\mu + \hbar e \gamma_5 - iMc] \psi = 0,$$

ove

$$\pi_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (\mu = 1, \dots, 4),$$

relativa a una particella di carica e , spin $1/2$, massa $m = (M^2 + a^2 e^2 \hbar^2 / c^2)^{1/2}$.

La (1) è stata applicata ⁽²⁾ allo studio di alcuni problemi di interesse fisico ed è stato fra l'altro osservato che l'equazione del secondo ordine che si ricava da (1) coincide coll'equazione del secondo ordine cui dà luogo l'ordinaria equazione di Dirac

$$(2) \quad (\gamma_\mu \pi_\mu - imc) \psi_D = 0.$$

In questa lettera vogliamo mostrare che se sono conosciute le soluzioni ψ_D dell'equazione di Dirac (2), si può facilmente risalire alle soluzioni della (1).

A questo scopo passiamo a considerare l'equazione di Dirac-Corben del secondo ordine. Applicando a sinistra l'operatore $\gamma_\mu \pi_\mu + \hbar e \gamma_5 + iMc$ otterremo da (1) l'equazione

$$(3) \quad \left(\pi_\mu \pi_\mu - \frac{\hbar e}{2ic} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} + M^2 c^2 + \hbar^2 a^2 e^2 \right) \Phi = 0,$$

⁽¹⁾ H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **9**, 591 (1952). Le nostre notazioni sono quelle stesse di tale lavoro, al quale pertanto senz'altro rinviamo.

⁽²⁾ P. CALDIROLA e P. GULMANELLI: *Nuovo Cimento*, questo stesso fascicolo.

che, come si è detto sopra, è identica all'equazione del secondo ordine di Dirac. La soluzione ψ dell'equazione del primo ordine di Dirac-Corben sarà pertanto

$$(4) \quad \psi = (\gamma_\mu \pi_\mu + \hbar a e \gamma_5 + i M c) \Phi .$$

Ma Φ si può ottenere da ψ_D , soluzione (che supponiamo nota) di (2), assai facilmente; infatti

$$(5) \quad \psi_D = (\gamma_\mu \pi_\mu + i m c) \Phi ,$$

e inoltre, considerando accanto a (2) anche la

$$(\gamma_\mu \pi_\mu + i m c) \varphi_D = 0 ,$$

sarà

$$(6) \quad \varphi_D = (\gamma_\mu \pi_\mu - i m c) \Phi .$$

Da (5) e (6) si deduce subito che la soluzione Φ più generale dell'equazione del secondo ordine è una combinazione lineare delle ψ_D , φ_D .

E pertanto le soluzioni ψ_D , φ_D possono utilizzarsi per costruire, mediante la formula

$$\psi = \left(1 + \frac{\hbar a e}{i c (M + m)} \gamma_5 \right) \psi_D$$

che si ottiene dalla (4) con qualche passaggio, la più generale soluzione dell'equazione del primo ordine di Dirac-Corben (1).

Sull'anomalia nella distribuzione angolare intrinseca dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica.

G. LOVERA

Istituto di Fisica dell'Università - Modena

(ricevuto il 28 Luglio 1952)

In una precedente nota ⁽¹⁾, è stata rilevata una anisotropia nella distribuzione angolare intrinseca dei rami di stelle prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni nucleari, almeno per le stelle con piccoli numeri di rami. Precisamente, si è osservato che le frequenze sperimentali degli angoli tra le proiezioni successive dei rami delle stelle sul piano dell'emulsione, si scostano, per le stelle a 3 ed a 4 rami, senza recoil e senza rami relativistici, dalle frequenze relative ad una distribuzione casuale, isotropa, e si lasciano invece inquadrare soddisfacentemente nella statistica degli eventi correlati, sviluppata nella nota stessa.

Le formule (9) e (10) ivi riportate, sono casi particolari della

$$(1) \quad P^{(r)}(l; m, 1) = \frac{\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{m-1} dt}{\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{m-1} dt}$$

per $r = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$; e $m = 2; 3$.

Lo studio statistico suddetto è stato esteso anche a stelle con $n = 5; 6; 7$ rami (non relativistici), osservate in lastre G5 Ilford esposte per alcune settimane a 3500 m (di cui alla precedente nota), con i seguenti risultati.

Per le stelle con $n = 5$ rami, prive di recoil visibile, la distribuzione presenta una netta discordanza dall'isotropia.

Precisamente, per $m = n - 1 = 4$, dalla (1) si ottiene:

$$(2') \quad r = 0,5 \quad P^{(0,5)}(l; 4, 1) = 1 - l^{1/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} l \right),$$

$$(2'') \quad r = 1 \quad P^{(1)}(l; 4, 1) = (1 - l)^4,$$

$$(2''') \quad r = 1,5 \quad P^{(1,5)}(l; 4, 1) = 1 - \frac{9009}{256} l^{1/2} \left(\frac{1}{3} l - l^2 + \frac{10}{7} l^3 - \frac{10}{9} l^4 + \frac{5}{11} l^5 - \frac{1}{13} l^6 \right),$$

$$(2''') \quad r = 2 \quad P^{(2)}(l; 4, 1) = 9(1 - l)^3 - 8(1 - l)^2.$$

⁽¹⁾ G. LOVERA: *Nuovo Cimento*, **9**, 134 (1952).

La formula per $r = 1$ corrisponde al verificarsi di una distribuzione casuale, di eventi non correlati (isotropia). Dalle $(2')$ -($2''''$), con le modalità indicate nella nota sopracitata, si calcola la probabilità $p_5^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$ che l'angolo tra due rami successivi della proiezione della stella sia compreso tra φ_1^0 e φ_2^0 gradi sessagesimali (tabella I).

Le frequenze sperimentali per le stelle a 5 rami (senza recoil) sono state determinate su 125 eventi (625 angoli): esse sono raccolte nella tabella I, e poste a confronto con le probabilità teoriche per $r = 1,0; 1,25; 1,5$ (i dati relativi a $r = 1,25$ sono stati calcolati per interpolazione).

TABELLA I. -- Frequenze sperimentali e probabilità teoriche per $n = 5$.

$\varphi_1^0 \div \varphi_2^0$	Freq. sper.	$p_5^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$		
		$r = 1,0$	$r = 1,25$	$r = 1,5$
$0 \div 36^\circ$	0,307	0,344	0,306	0,274
$36 \div 72$	0,268	0,246	0,275	0,299
$72 \div 108$	0,193	0,170	0,193	0,212
$108 \div 144$	0,110	0,110	0,115	0,119
$144 \div 180$	0,082	0,067	0,064	0,061
$180 \div 216$	0,027	0,037	0,030	0,025
$216 \div 252$	0,013	0,018	0,012	0,008
$252 \div 288$	0,000	0,006 ₅	0,004	0,002
$288 \div 324$	0,000	0,001 ₅	0,001	0,000
$324 \div 360$	0,000	0,000	0,000	0,000

Appare evidente che le frequenze sperimentali si scostano nettamente da quelle previste per il caso dell'isotropia ($r = 1$), e sono, invece, in accordo soddisfacente con quelle calcolate per $r = 1,25$.

Invece, le deviazioni sistematiche delle frequenze sperimentali dall'isotropia si attenuano, sino a diventare praticamente irrilevanti, per le stelle, senza recoil, con $n = 6$ rami (44 stelle, 264 angoli), e rispettivamente con $n = 7$ rami (34 stelle, 238 angoli), come risulta dalla tabella II. Questo risultato appare sufficientemente netto, pur essendo minore l'entità del materiale statistico disponibile. Perciò l'indagine non è stata estesa alle stelle con $n > 7$.

Dai dati della presente e della precedente nota ⁽¹⁾, si deduce che l'anomalia della distribuzione dei rami rispetto all'isotropia è particolarmente spiccata per le stelle senza recoil a piccolo numero di rami, e si attenua al crescere di questo sino a scomparire praticamente per $n = 7$. Essa si estrinseca in una maggiore frequenza degli angoli appartenenti alle classi intermedie, a scapito degli angoli piccoli e grandi, rispetto alle frequenze inerenti alla statistica degli eventi casuali, indipendenti: si osserva cioè una simmetria nella distribuzione dei frammenti nucleari maggiore di quella comportata da una loro emissione puramente casuale. Siffatta anisotropia è peculiare delle stelle senza recoil: in altri termini, il fenomeno è presentato essenzialmente dalle stelle provenienti dalla disintegrazione dei nuclei leggeri presenti nell'emulsione.

TABELLA II. — Frequenze sperimentali e probabilità teoriche per $n = 6$, e $n = 7$.

$\varphi_1^0 \div \varphi_2^0$	$n = 6$			$n = 7$	
	Freq. sper.	$p_6^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$		Freq. sper.	$p_7^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$
		$r = 1,0$	$r = 1,25$		$r = 1,0$
$0 \div 36^\circ$	0,401	0,409	0,371	0,471	0,469
$36 \div 72$	0,286	0,263	0,300	0,265	0,269
$72 \div 108$	0,146	0,160	0,176	0,132	0,145
$108 \div 144$	0,098	0,090	0,088	0,111	0,071
$144 \div 180$	0,053	0,047	0,044	0,021	0,031
$180 \div 216$	0,008	0,021	0,015	0,000	0,011 ₅
$216 \div 252$	0,004	0,008	0,005	0,000	0,003
$252 \div 288$	0,000	0,002	0,001	0,000	0,000 ₅
$288 \div 324$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$324 \div 360$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Questi risultati inerenti alle stelle senza recoil visibile sono in accordo con le conclusioni di analisi analoghe, condotte con criteri statistici differenti, da DELLA CORTE e GIOVANNONZI ⁽²⁾ (limitatamente a $n = 3$) e da HODGSON ⁽³⁾ fino a $n = 6$: i dati contenuti nella presente nota permettono di accertare la presenza dell'anomalia almeno fino a $n = 5$, con evidenza ed efficacia descrittiva maggiori rispetto al criterio del χ^2 (adottato da HODGSON).

È, infine, opportuno rilevare che, per estrapolazione dei risultati ora esposti, anche per le stelle a due rami senza recoil c'è da attendere una distribuzione statistica angolare (degli angoli in proiezione) non coincidente con quella casuale.

Dalla (1) per $m = n - 1 = 1$ si ottiene

$$(3') \quad r = 0,5 \quad P^{(0,5)}(l; 1, 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-l}{l} \right)^{1/2},$$

$$(3'') \quad r = 1 \quad P^{(1)}(l; 1, 1) = 1 - l,$$

$$(3''') \quad r = 1,5 \quad P^{(1,5)}(l; 1, 1) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-l}{l} \right)^{1/2} + \frac{2}{\pi} (1-l)^{1/2} l^{1/2} (1-2l),$$

$$(3''''') \quad r = 2 \quad P^{(2)}(l; 1, 1) = 3(1-l)^2 - 2(1-l)^3,$$

e le corrispondenti distribuzioni di probabilità per i dieci intervalli angolari sinora considerati sono contenute nella tabella III.

⁽²⁾ M. DELLA CORTE e M. GIOVANNONZI: *Nuovo Cimento*, **8**, 741 (1951).

⁽³⁾ P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **44**, 190 (1952).

TABELLA III. - *Probabilità teoriche per $n = 2$.*

$\varphi_1^0 \div \varphi_2^0$	$P_2^{(r)}(\varphi_1^0; \varphi_2^0)$			
	$r = 0,5$	$r = 1,0$	$r = 1,5$	$r = 2,0$
$0 \div 36^\circ$	0,205	0,100	0,052	0,028
$36 \div 72$	0,090	0,100	0,090	0,076
$72 \div 108$	0,074	0,100	0,110	0,112
$108 \div 144$	0,067	0,100	0,121	0,136
$144 \div 180$	0,064	0,100	0,127	0,148
$180 \div 216$	0,064	0,100	0,127	0,148
$216 \div 252$	0,067	0,100	0,121	0,136
$252 \div 288$	0,074	0,100	0,110	0,112
$288 \div 324$	0,090	0,100	0,090	0,076
$324 \div 360$	0,205	0,100	0,052	0,028

Considerando i dati di quest'ultima tabella, appare evidente che la distribuzione statistica angolare potrebbe essere profondamente alterata se, invece di $r = 1$, cioè della distribuzione casuale, valesse, invece, ad esempio il caso $r = 1,5$ (come accade per $n = 3$, per le stelle prive di recoil).

Intensity measurement of Cerenkov light.

P. BASSI, A. M. BIANCHI and C. MANDUCHI

Istituto di Fisica dell'Università, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 12 Agosto 1952)

According to the theory ⁽¹⁾ the intensity of Cerenkov radiation is proportional to $1 - 1/n^2\beta^2$ so long as the dependence of n on the frequency is not considered. The dependence of the observed light on β may vary according to different experimental conditions: e.g. coherence might affect the results.

In this letter we are publishing the first measurements taken with an apparatus the purpose of which is to study the intensity of Cerenkov light as a function of the energy of the incident particle.

The apparatus consists of four trays of G.M. counters I, II, III, IV and a Cerenkov light detector. Coincidences I, II, III, IV and anticoincidences I, II, III-IV can be registered. The detector

consists of an EMI 5311 photomultiplier at the bottom of a plexiglass cylinder 16 cm high and 4 cm in diameter, coated with MgO.

The coincidence or anticoincidence output signal goes to a synroscope which triggers a C.R.O. (Phylips DB13/2 the vertical plates of which are connected with the photomultiplier amplifier. The amplifier has a rise time equal to decay time (1,5 μ s) and a gain of 350: besides the usual advantages of these type amplifiers, a convenient delay of the peak value can be obtained. The pulses are photographed and their height measured.

The anode and heater supplies are stabilized.

In order to select particles of diffe-

TABLE I.

A cm Pb	B cm Pb	C cm Pb	Residual Range g/cm ² air	N	\bar{W}	q	q
22.5	0	15	40 - 100	141	22.46	0.70	8
15	15	52	140 - 500	144	24.92	0.82	10
15	15	52	500 - ∞	250	32.18	0.70	10

(¹) H. J. SCHIFF: *Quantum Mechanics* (New York, 1950).

rents β , various thicknesses of the lead absorber B and C were used. Absorber A has the purpose of increasing the

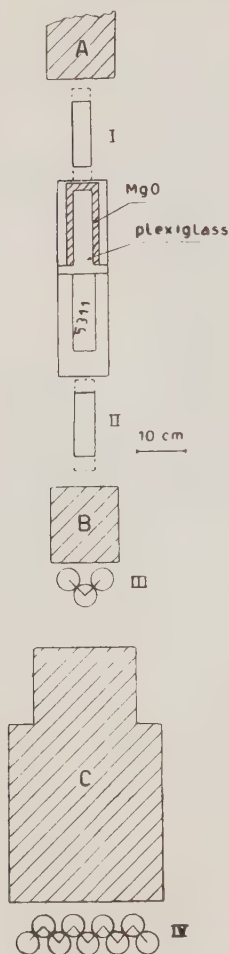


Fig. 1.

intensity in the interval selected by the counter system; it also absorbs secondaries from the roof and the air.

Results are plotted in fig. 2a and Table I where N is the number of photo-

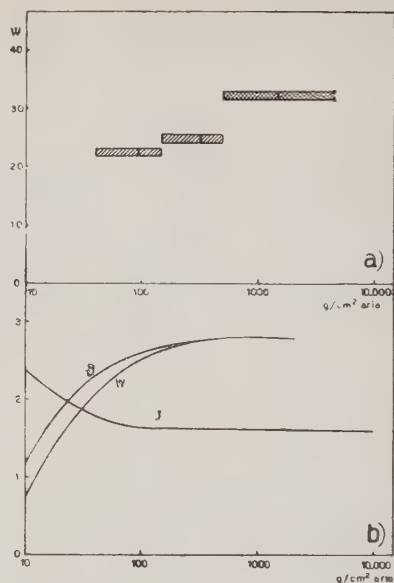


Fig. 2.

graph, W the observed intensity of radiation in arbitrary units, q and \bar{q} respectively the standard error and the mean error of a single measurement, according to the Poisson distribution. In fig. 2a the average values of energy, in fig. 2b the theoretical curves of the radiation intensity W , of the emission angle θ and of the ionization energy loss J are reported, all of them in arbitrary units.

For high momenta our results do not agree with theory.

Beyond some hundred grams per cm^2 θ and J are practically constant, so that it appears impossible to justify the observed increase both with geometrical effects and fluorescence⁽²⁾. In the same range of energy the contribution from knock-on electrons should not

(2) P. BASSI and A. M. BIANCHI: Il corso di stampa sul *Nuovo Cimento*.

depend, according to theory, on energy. As a matter of fact knock-on electrons are few as it was possible to deduce comparing two series of measurements in one of which absorber A was close to counter I and another in which absorber A was 250 cm higher. The ratio of the average pulse heights in the two different conditions is $q = 1.00 \pm 0.03$.

Experiments to confirm this disagree-

ment of our results with theory are in progress: such a disagreement might indicate a new method of measuring high energies.

Thanks are due to Professor A. ROSTAGNI of Padua University for many stimulating discussions and to Ing. E. GATTI of Lab. CISE in Milan for useful advice on technical problems.

On the Oscillating Cylinder Viscosimeter.

A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL

Physics Department, Faculty of Science, Alexandria University - Alexandria (Egypt)

(ricevuto il 14 Agosto 1952)

When a non-elastic fluid of density ρ in g cm^{-3} and coefficient of viscosity η in $\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ is placed between two co-axial cylinders, the outer of inner radius b (in cm) is set in small oscillations at various frequencies n (in s^{-1}), while the inner of radius a (in cm) and moment of inertia I (in g cm^2) is suspended by a torsion wire of restoring constant τ in $\text{g cm}^{-2} \text{s}^{-2}$, then the amplitude θ_0 of the oscillation of the inner cylinder is calculated from the following formula:

$$(1) \quad \left(\frac{\theta_0}{\vartheta_0} \right) = \{ (C^2 + D^2) \exp(6d/R) \} / \{ (C^2 + D^2) + (\gamma^2 \omega^2 - D^2) \sin^2 2Dd + \\ + ([3D/2R] - \gamma \omega C) \sin 4Dd + \\ + (\gamma^2 \omega^2 + 2C^2) \sinh^2 2Cd + \\ + ([3C/2R] + \gamma \omega D) \sinh 4Cd \}$$

where ϑ_0 is the amplitude inexorably imposed on the outer cylinder,

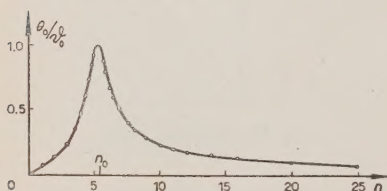


Fig. 1.

$$C = \{ (9/8R^2) + ([81/64R^4] + B^4)^{1/2} \}^{1/2} \\ D = \{ - (9/8R^2) + ([81/64R^4] + B^4)^{1/2} \}^{1/2} \\ R = (a + b)/2 \\ d = (b - a)/2 \\ B = (\pi \rho n / \eta)^{1/2}$$

and

$$\gamma = (I\omega^2 - \tau) / 2\pi L \eta a^3 \omega^2,$$

ω being the angular velocity of the outer cylinder and L the length of the inner cylinder from the surface the of liquid to the lower extremity.

The theoretical details of equation (1) will be published later.

From the figure we see that in the case of liquid paraffin B.P. of density 0,877 g/ml and viscosity 1,76 poises at 25 °C the experimental results of OLDRYD, STRAW-

BRIDGE and TOMS ⁽¹⁾ agree with our theoretical equation (1) for all values of θ_0/ϑ_0 . The agreement appears to justify the neglect of end effects as well as to indicate the limitation in our proposed theory ⁽²⁾.

Also the figure shows a peak in θ_0/ϑ_0 ; not exceeding unity, at a value of n almost exactly equal to the frequency n_0 of free oscillation of the wire and inner cylinder.

It is a pleasure to thank Professor M. A. EL-SHERBINI for helpful suggestions.

⁽¹⁾ J. G. OLDROYD, D. J. STRAWBRIDGE and B. A. TOMS; *Proc. Phys. Soc.*, **64** B, 55 (1951).

⁽²⁾ A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL (unpublished).

ERRATUM-CORRIGE

Le figure di pagine 734 e 735 vanno scambiate tra loro.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA